

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO/USP**  
**INSTITUTO DE FÍSICA / IF**  
**BACHARELADO EM FÍSICA**

**Renan Matos da Silva**

**Nº USP: 11918114**

**Estudo de Cálculo Relacionado à Astronomia na Antiguidade**

**São Paulo**

**2020**

**Universidade de São Paulo**

**Renan Matos da Silva**

**N° USP: 11917114**

**Estudo de Cálculo Relacionado à Astronomia na Antiguidade**

Trabalho desenvolvido como exigência, junto à avaliação, para a aprovação na disciplina de Cálculo I, ministrada pelo Prof. Dr. Oscar João Abdonour.

**São Paulo**

**2020**

## **Sumário**

Introdução	3
O Surgimento da Astronomia - Platão, Aristóteles e Ptolomeu	5
O fim do Geocentrismo - Galileu Galilei e Johannes Kepler	7
Cálculo Diferencial e Integral provando as Três Leis de Kepler	9
Então, como o Cálculo refutou o geocentrismo?	11
E se o conhecimento do Cálculo estivesse presente desde Ptolomeu?	11
Considerações finais	13
Referências bibliográficas	15

## Introdução

A Astronomia representa a ciência por trás dos estudos e entendimentos a respeito do universo e de seus fenômenos, e teve início antes mesmo da palavra “Astronomia” (que vem do grego *Astron*, que significa **astro**, e *Nomos*, que significa **lei**) existir e ser associada a ela. Durante séculos, pela ausência do maquinário tecnológico e de ferramentas matemáticas mais complexas, que mais à frente seriam descobertas, o estudo do universo era superficial e limitado ao que os olhos podiam ver. Assim, mesmo com grandes nomes da história da Astronomia tentando desvendar os mistérios que existem além do céu, demorou muito tempo até que fosse possível chegar a respostas concretas, com evidências científicas, ao invés de suposições mitológicas, e até comprovações visuais.

Pensadores influentes de grandes civilizações antigas, como Ptolomeu, Platão ou Aristóteles, postularam as primeiras noções do funcionamento do universo, como, por exemplo, o geocentrismo e a gravitação aristotélica, que eram errôneas, porém, que permaneceram irrefutáveis por séculos, além de serem consideradas precursoras do estudo do espaço.

A dificuldade do avanço científico no ramo da Astronomia, na época, se deu, principalmente, pela igreja e sua grande influência. Grandes nomes da história científica contestaram o modelo geocêntrico de Ptolomeu, mas aqueles que apresentaram provas para seu refutamento, foram perseguidos pela igreja, já que, se o homem é a criação predileta de Deus, este, porém, deveria ocupar o centro do universo.

Com a invenção do telescópio, mais defensores do modelo que refutaria o geocentrismo, conhecido por heliocentrismo, apareceram, assim como as provas que mudariam o rumo da história da Astronomia. Alguns desses nomes, como Galileu Galilei, fomentou ainda mais o debate de qual modelo estaria correto, quando teria provado o modelo heliocêntrico a partir de observações em seu telescópio. Johannes Kepler também pôde deixar o seu legado com suas três leis que descreviam, com precisão, os movimentos dos corpos celestes no espaço e, a partir, também, de observações, suas leis provavam o heliocentrismo, mesmo que ainda faltassem explicações para o porquê daqueles resultados.

Alguns anos à frente, Newton e Leibniz, com o surgimento da ferramenta matemática mais sofisticada atualmente, o cálculo diferencial e integral, dão o veredito, provando,

matematicamente, que o modelo heliocêntrico está correto e, assim, acabando com uma discussão que levou séculos para ser encerrada.

Porém, como o cálculo diferencial e integral provou o heliocentrismo? E como seriam os rumos da história da Astronomia, caso o conhecimento do cálculo diferencial e integral estivesse presente desde a época de Ptolomeu?

## O Surgimento da Astronomia - Platão, Aristóteles e Ptolomeu

Grandes nações da antiguidade já estudavam Astronomia sem saber. Na verdade, utilizavam uma de suas vertentes: a Astrologia. Havia uma busca incessante pela descoberta do que representava os pontos brilhantes no céu, até que supuseram que as estrelas teriam relação direta com a mitologia, sendo capazes de prever acontecimentos ou influenciarem nas decisões dos grandes reis. Além disso, grandes pensadores, a partir, principalmente, da observação, iniciaram os estudos referentes ao funcionamento do universo.

Um dos primeiros precursores desse estudo, com grande nome na filosofia grega, foi Platão. Fundador da Academia de Atenas, aluno de Sócrates e professor de Aristóteles, Platão tem grande importância na Astronomia, mesmo que o foco de suas obras e análises tenha sido no campo filosófico, pois foi o primeiro, ao observar as órbitas dos planetas no céu, que elaborou uma teoria de que os corpos celestes giravam em torno da Terra em movimento circular uniforme.

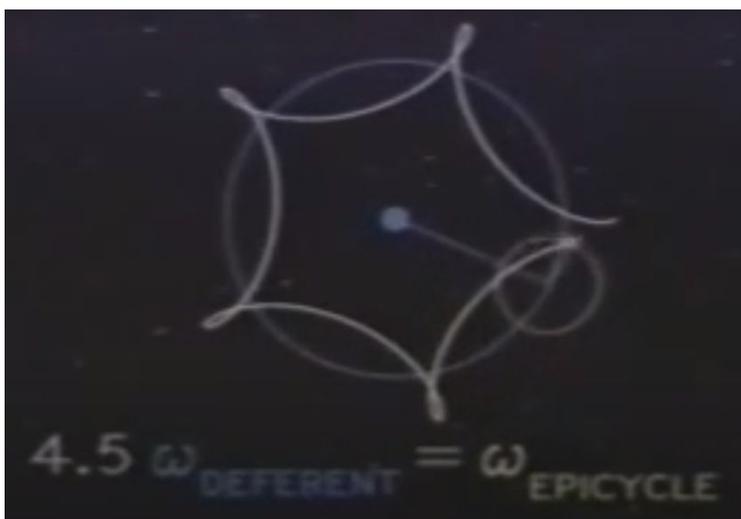
Nessa época, a noção de geocentrismo já existia, ainda mais por a igreja ter demonstrado apoio à teoria geocêntrica, uma vez que, em alguns relatos bíblicos, era possível entender que o Sol girava em torno da Terra. Um desses exemplos é a batalha de Josué contra o rei de Jerusalém, Adoni-Zedeque, e outros quatro reis na conquista da terra prometida, narrada em Josué 10:12-13 - **“Então Josué falou ao Senhor, no dia em que o Senhor deu os amorreus nas mãos dos filhos de Israel, e disse na presença dos israelitas: Sol, detém-te em Gibeom, e tu, lua, no vale de Ajalom. E o sol se deteve, e a lua parou, até que o povo se vingou de seus inimigos. Isto não está escrito no livro de Jasher? O sol, pois, se deteve no meio do céu, e não se apressou a pôr-se, quase um dia inteiro.”**

Aristóteles, por sua vez, também acreditava no geocentrismo e foi além, com a criação da primeira noção de gravitação da história da Astronomia, que mais tarde cairia por uma refutação realizada por Galileu, conhecida por gravitação aristotélica. Tal teoria, também chamada de “teoria dos quatro elementos” ou “teoria do local de origem”, tinha duas partes:

1. Os elementos eram dispostos em camadas na seguinte ordem: terra, água, ar e fogo. Dessa forma, a terra representava o planeta Terra, a água representava os oceanos, o ar representava a atmosfera e o fogo representava o Sol.

2. Todos os corpos tendem a voltar perpendicularmente ao seu local de origem. Por exemplo, se uma pedra é solta no ar, ela cai em queda livre perpendicularmente em direção ao centro da Terra pois a pedra tende a voltar ao seu local de origem, no caso a terra. Já quando se acende uma chama, ela aponta perpendicularmente para cima, pois tende a voltar ao seu local de origem, no caso, o fogo (Sol).

Cláudio Ptolomeu foi um importante astrônomo e geógrafo de origem grega e, pelo seu primeiro nome “Cláudio”, há teorias de que ele possa ter tido cidadania com os romanos. Ptolomeu foi responsável pela criação do modelo geocêntrico mais famoso, sendo conhecido por “modernizar” e simplificar os modelos propostos pelos seus antecessores. O modelo geocêntrico de Ptolomeu buscou representar a Terra no centro do universo, como já era comum, porém, buscou responder e “consertar” alguns problemas que as teorias geocêntricas anteriores não conseguiam explicar, como, por exemplo, o movimento retrógrado de corpos celestes. Esse problema se dava pois astrônomos observavam que os corpos celestes faziam órbitas confusas, às vezes indo e, outras, voltando no céu. Ptolomeu, então, descreveu o movimento dos corpos do modelo geocêntrico de acordo com a **Figura 1**, no qual existiam dois movimentos circulares, um dentro do outro, ou seja, o corpo celeste rotacionava ao redor de um eixo invisível e esse eixo invisível rotacionava ao redor da Terra, por isso era possível notar um movimento retrógrado durante as observações dos astrônomos.



**Figura 1:** Movimento dos corpos ao redor da Terra. Ptolomeu chamou o movimento do planeta em torno do “eixo invisível” de *epiciclo* e o movimento do “eixo invisível” ao redor da Terra foi chamado de *deferente*. Para que fosse possível esse movimento descrito na figura, a velocidade angular do epiciclo deveria ser maior que a do deferente.

Vale ressaltar que, mesmo as teorias de Ptolomeu tenham sido errôneas, ele ainda é

considerado um influente astrônomo por ter fomentado o estudo do cosmos a partir de suas observações, que, mais para frente seriam refutadas e discutidas.

### **O fim do Geocentrismo - Galileu Galilei e Johannes Kepler**

O astrônomo Galileu Galilei foi um dos nomes mais importantes, não só no ramo da Astronomia, mas em vários outros, como mecânica da física ou filosofia. Conhecido como pai da ciência moderna, Galileu, em sua contribuição para o estudo da física, desenvolveu a primeira teoria de relatividade do movimento, além, também, de descobrir que corpos soltos em alturas iguais no mesmo instante chegam ao solo em tempos iguais (que pôde ser comprovado com o incrível experimento da queda livre da bola de boliche e de plumas, conhecido no ramo experimental de física).

Galileu Galilei foi o primeiro cientista a provar o Heliocentrismo, modelo proposto por Aristarco de Samos e aperfeiçoado por Copérnico. Os dois grandes astrônomos, porém, não conseguiram provar à comunidade científica suas teorias, principalmente pela falta de um maquinário tecnológico mais sofisticado, como o telescópio. Galileu, por sua vez, tinha consigo o mais sofisticado telescópio da sua época, criado por ele mesmo, e, dessa forma, conseguiu provas do Heliocentrismo ser o modelo que descreveria corretamente o funcionamento do Sistema Solar, à partir da observação das fases de Vênus. O astrônomo constatou que, se o modelo geocêntrico realmente estivesse correto, as fases de Vênus deveriam ser semelhantes às da Lua, uma vez que os dois orbitariam de maneira semelhante ao redor da Terra, porém, isso não ocorre.

Vale a menção de que a igreja não aceitou simplesmente que um “desconhecido” viesse à público dizer que o que a Bíblia dizia (a respeito do geocentrismo) estava errado e que a criação predileta de Deus não ocupava o centro do universo. Dessa forma, Galileu foi acusado de heresia e forçado a mentir, dizendo que as teorias de Copérnico eram apenas hipóteses. Quando houve uma troca de papas na igreja, Galileu se animou e resolveu publicar uma de suas obras, porém, também foi caçado e obrigado a queimá-la publicamente.

Galileu, com seus estudos à respeito da mecânica e a queda dos corpos, refutou a teoria da gravitação aristotélica, comprovando a existência da gravidade e seu papel nos movimentos de queda livre. Em um de seus livros, “*Diálogo sobre os dois máximos sistemas*

*do mundo*”, Galileu refuta Aristóteles com o seguinte argumento: se tudo tende a voltar ao seu local de origem perpendicularmente, e a chama não assim o faz (visto que há oscilações, causadas pelo vento), significa que ou o Sol ou a Terra está em movimento. Se o Sol estivesse em movimento, independentemente de qualquer lugar do planeta que se acendesse uma chama, esta apontaria para a mesma direção, o que não necessariamente ocorre, invalidando esta possibilidade, fazendo com que reste só o fato de que a Terra estaria em movimento. Segundo Aristóteles, a Terra ocupava o centro do universo e era imóvel, enquanto todos os outros corpos que se movem foram chamados de “corpos celestes” e afirmado por Aristóteles que nenhum corpo celeste poderia ocupar o centro do universo. Se não é o Sol que se move, então é a Terra. Se a Terra se move, esta, portanto, é um corpo celeste. Assim, se nenhum corpo celeste pode ocupar o centro, a Terra não é o centro do universo. Dessa forma, Galileu, além de sua prova a partir da observação, começa, também, a refutar, logicamente, o geocentrismo.

Outro nome crucial para a Astronomia foi Johannes Kepler. Conhecido pelas suas famosas leis que descrevem, precisamente, o movimento dos corpos no espaço, Kepler viria a provar, matematicamente, o modelo heliocêntrico. Entretanto, teve dificuldades para explicar os resultados de suas observações, assim, seus esforços para obter explicações foram anulados pela comunidade científica. Suas leis, porém, permanecem como um grande salto no estudo da Astronomia. Kepler chegou a esses resultados a partir de observações severas e cálculos precisos a partir da geometria. Um dos exemplos de suas observações é a órbita de Marte, cujo período causava um erro de aproximadamente oito minutos comparado a uma trajetória circular. Dessa forma, Kepler pôde concluir que, na verdade, sua trajetória é elíptica e, quando o planeta passava em um trecho mais perto do Sol, que, segundo o astrônomo, a estrela ocupa um dos focos da elipse, o período era menor do que em um trecho mais distante. Atualmente, as noções de “trecho mais perto” e “trecho mais distante” do Sol são conhecidas por periélio e afélio, respectivamente. Sobre suas leis:

**1º Lei de Kepler:** as trajetórias dos planetas ao redor do Sol são elipses, com o Sol em um dos focos.

**2º Lei de Kepler:** a área varrida pelo vetor posição do planeta, em intervalos de tempo iguais, é igual.

**3º Lei de Kepler:** os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos de suas distâncias médias ao Sol.

As leis de Kepler só foram provadas e, conseqüentemente, se tornaram leis de fato com a invenção do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz.

### **Cálculo Diferencial e Integral provando as Três Leis de Kepler**

O cálculo diferencial e integral surgiu a partir de uma “disputa” pela resposta de um problema, protagonizada por Isaac Newton e Gottfried Leibniz que, embora tenham apresentado seus resultados em tempos diferentes, a história da matemática “concordou” em afirmar que são os criadores dessa sofisticada ferramenta matemática.

Newton diz em seu livro “*Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*” que “se apoiou” em gigantes para desenvolver suas teorias no âmbito da física, referindo-se, assim, à Galileu e à Kepler, com a diferença de que Newton teria o cálculo diferencial e integral a seu favor.

Além disso, Newton desenvolve a famosa lei da gravitação universal a partir dos conhecimentos postulados de Kepler e de seus próprios estudos acerca do movimento circular. Dessa forma, constatou que os corpos, desenvolvendo suas órbitas, estão em constante queda livre, porém, com velocidades suficientemente grandes para que não caiam. As trajetórias curvas são descritas a partir de uma aceleração que muda, constantemente, a direção e o sentido do vetor velocidade (sempre tangente à trajetória), conhecida por aceleração centrípeta. Tal aceleração centrípeta sempre é resultado de uma força resultante centrípeta, que aponta para o centro da trajetória circular (anti paralela ao vetor posição) e, dessa forma, em movimentos orbitais de corpos celestes, a resultante centrípeta é a própria força de atração gravitacional (força peso). Dessa forma, usando o conceito de força resultante onde  $F = m.a$ , pela segunda lei de Newton, se a aceleração nesse caso é a centrípeta, onde  $a_c = \omega^2.R$ , a velocidade angular  $\omega$  pode ser escrita em função do período, sendo  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e utilizando conceitos da terceira lei de Newton, portanto, pode-se escrever que  $F = \frac{GMm}{R^2}$ .

Provando a 1º Lei de Kepler, Newton usou o conceito de derivada, usando troca de variáveis e a regra da cadeia, em sua própria equação da lei da gravitação universal. A derivada é um conceito que ajuda a entender como a função varia e se comporta, resultando no coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto e ajuda a achar pontos de

crescimento e decrescimento da função, além, também, de indicar tipos de concavidade, por exemplo. Newton chegou, portanto, na seguinte expressão:

$$r = \frac{l^2}{(GMm^2)(1+\epsilon\cos(\theta+\theta_0))}$$

Na expressão acima, há um termo, em específico, que determinará o tipo de movimento planetário. O  $\epsilon$  é uma constante arbitrária de integração que pode ser obtida se houver a posição  $r$  do corpo. Se  $\epsilon = 0$ , então a trajetória é de um círculo. No entanto, se  $\epsilon \leq 1$ , então a trajetória é elíptica. Se todo círculo é uma elipse, então toda trajetória planetária é uma elipse, comprovando a 1ª Lei de Kepler. Esse método também é conhecido por “derivada da 1ª Lei”.

Dessa vez, provando a 2ª Lei de Kepler, Newton usou o conceito de integral definida, obtida a partir do limite da soma de Riemann, que seria possível calcular a área exata abaixo da linha do gráfico em um intervalo. Para provar que as áreas eram sempre constantes, Kepler aproximou a área varrida de uma área de um triângulo de base sendo a variação do vetor posição e altura sendo o próprio vetor posição, dessa forma  $A = \frac{r\Delta r}{2}$ . Newton, portanto, utilizando o cálculo diferencial e integral, usou da ferramenta para analisar a área exata varrida pelo vetor posição do planeta em intervalos de tempo iguais. Assim, usou o conceito do limite da soma de Riemann aplicado à essa área de triângulo, dessa forma, sabendo que a variação do vetor posição pode ser escrita como  $\Delta r = v.\Delta t$  e, além disso, adequando a velocidade para o movimento circular, onde  $v = \omega.R$ , recebe-se a integral:

$$A = \int_0^t \frac{Rv}{2} dt = \int_0^t \frac{R^2\omega}{2} dt$$

Resolvendo a integral, a equação para a área obtida é:

$$A = \frac{L.t}{2.m}$$

Dessa forma, se o momento angular é constante, a massa do corpo é constante e o tempo é constante (visto que Kepler menciona intervalos de tempos iguais), assim, a área varrida é constante, comprovando a 2ª Lei de Kepler.

Por último, para provar a 3ª Lei de Kepler, Newton utilizou da expressão encontrada a partir da “derivada da 1ª Lei”:

$$r = \frac{l^2}{(GMm^2)(1+\epsilon\cos(\theta+\theta_0))}$$

Como a maioria dos termos são constantes, visto que o cosseno é a única variável, o raio da trajetória (ou vetor posição)  $r$  assumirá valor médio quando a variável assumir o valor médio. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, aplicando o Teorema do Valor Médio para esse caso, obtém-se o valor:

$$r_{med} = \frac{l^2}{GMm^2}$$

A partir disso, usando o conceito de período no movimento circular, sendo  $P = \frac{2\pi}{\omega}$ , e usando a lei das áreas (2º Lei de Kepler), chega-se na relação:

$$\frac{P^2}{r_{med}^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Comprovando, portanto, a 3º Lei de Kepler, onde o quadrado do período é proporcional ao cubo do raio médio (ou pode-se dizer que a razão entre o quadrado do período e o cubo do raio de médio é sempre constante).

### **Então, como o Cálculo refutou o geocentrismo?**

Se as três leis de Kepler são uma forma de provar, matematicamente, o heliocentrismo e o cálculo diferencial e integral, por sua vez, é responsável por provar as leis de Kepler, assim, pode-se dizer que o cálculo diferencial e integral é responsável, portanto, por provar o heliocentrismo, refutando, conseqüentemente, o geocentrismo.

### **E se o conhecimento do Cálculo estivesse presente desde Ptolomeu?**

Se apenas o conhecimento do cálculo diferencial e integral estivesse presente desde a época de Ptolomeu, pode-se supor que nada mudaria, ou seja, o modelo geocêntrico ainda seria desenvolvido pelo astrônomo e geógrafo. Vale lembrar que a primeira refutação ao geocentrismo veio da observação e não diretamente de uma prova matemática. Assim, na época, Ptolomeu poderia ter em mãos a mais sofisticada ferramenta matemática que já existiu, porém, a observação era crucial para a ciência e a ausência de um maquinário tecnológico impediria conclusões mais assertivas a respeito do funcionamento do universo. Dessa maneira, Ptolomeu poderia ter usado o cálculo diferencial e integral para elaborar uma teoria geocêntrica mais “sofisticada”, uma vez que derivadas e integrais facilitam os estudos de

funções curvas, então, o astrônomo teria mais facilidade para lidar com os tipos de movimentos que observava no céu.

Vale ressaltar, ainda, que a igreja, na época, tinha grande poder e influência sobre qualquer ramo da sociedade, seja ele religioso, político ou científico. Caso, por algum motivo, Ptolomeu provasse a veracidade do modelo heliocêntrico matematicamente, a igreja nunca permitiria que tais informações fossem divulgadas, então ele seria perseguido e, caso fosse obrigado a depor, provavelmente teria que mentir para evitar sua execução, semelhante ao que houve com Galileu Galilei. Além disso, uma prova matemática sem uma prova “observável” e vice-versa são valem de nada e, quando fosse questionado a respeito de provas de que o modelo heliocêntrico é realmente o modelo correto, Ptolomeu não conseguiria apresentá-las, já que lhe faltava um maquinário para isso (telescópios, por exemplo).

Por outro lado, com o auxílio do cálculo diferencial e integral, Nicolau Copérnico ou até mesmo Aristarco de Samos, poderiam já ter comprovado e provado matematicamente o modelo heliocêntrico, fazendo com que Galileu Galilei e Isaac Newton pudessem focar em outras áreas da física e assim por diante. Ou seja, grandes descobertas no mundo científico poderiam ter sido catalogadas, estudadas e comprovadas muito antes do seu tempo real, dessa forma, atualmente, a ciência poderia estar muito mais avançada em todos os campos, o homem poderia já ter ido à Marte ou colonizações espaciais, parecidas com as de filmes de ficção científica, já seria possível. Porém, infelizmente, ainda é necessário debater e explicar que a Terra não é plana!

### **Considerações finais**

O cálculo diferencial e integral está presente em diversas áreas do conhecimento e até no dia-a-dia de uma pessoa. Certamente a invenção dessa ferramenta matemática, considerada a mais sofisticada da história, mudou o mundo científico, facilitando cálculos, estudos de áreas mais precisos e até provando algumas leis no campo da ciência.

Foi dessa forma que, indiretamente, o cálculo diferencial integral pôs fim a uma discussão que perdurou por séculos: qual modelo do sistema solar estaria correto, o geocêntrico ou o heliocêntrico?

O modelo geocêntrico começou a ser refutado, logicamente e filosoficamente, antes da invenção do cálculo diferencial e integral. Com a invenção do telescópio., a partir de observações severas, astrônomos influentes acharam inconsistências no geocentrismo, vindo à tona uma nova teoria de um modelo que faria mais sentido e se encaixava nas observações realizadas. Porém, havia apenas provas baseadas em observações, assim, havia a necessidade de uma prova matemática, para se houvesse um veredito.

Com a invenção do Cálculo, essa prova matemática que tanto se necessitava foi obtida. O uso de ferramentas como a derivada e a integral definida, por exemplo, puderam provar, matematicamente, o modelo heliocêntrico e, com uma prova lógica, uma prova a partir da observação e uma prova matemática, o modelo geocêntrico foi refutado por completo, mesmo que igreja demoraria alguns séculos para concordar com esse fato. Johannes Kepler desenvolveu suas três leis para explicar o movimento dos planetas no sistema solar, a partir do modelo heliocêntrico, porém, Kepler teve dificuldades para explicar o porquê daqueles resultados. Dessa forma, esse porquê foi obtido a partir do Cálculo. Se as leis de Kepler foram um método para comprovar o heliocentrismo, e o cálculo diferencial e integral foi responsável por provar as leis de Kepler, então, analogamente, o Cálculo foi responsável por comprovar o heliocentrismo.

A partir disso pôde-se haver suposições de que rumos a história da astronomia e da ciência, como um todo, teria tomado caso o conhecimento do Cálculo estivesse presente desde os primórdios estudos a respeito dos astros, com o desenvolvimento do modelo geocêntrico por Ptolomeu. Uma hipótese que pode ser apresentada seria que não mudaria nada no âmbito de criação de um modelo geocêntrico, uma vez que não foi a falta de uma ferramenta matemática que levou Ptolomeu ao desenvolvimento dessa teoria, sendo que ela é originada a

partir de antigos pensadores e de observações rasas com o que se tinha disponível na época. Porém, ainda assim, a teoria heliocêntrica poderia ter sido estudada, comprovada e provada matematicamente de forma mais rápida pelos sucessores de Ptolomeu, como Aristarco de Samos ou Nicolau Copérnico, e, assim, a humanidade poderia estar muito à frente no estudo do espaço e na ciência, usufruindo de um conhecimento mais denso a respeito do cosmos.

### Referências bibliográficas

Galilei, Galileu. *Diálogo Sobre Os Dois Máximos Do Mundo Ptolomaico e Copernicano*. Col. Estudos Sobre a Ciência e a Tecnologia. Rio de Janeiro: Editora 34, 2011;

Ravagnani, Fábio Araújo. *Cálculo Diferencial e Integral no movimento dos planetas*. 2014. 71 páginas - UNESP, São José Do Rio Preto, 2014.

*The Mechanical Universe... and Beyond*. Produção de Caltech (California Institute of Technology). TV Cultura, 1986. 1 vídeo (28 min.). Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=DvImS7cCQLI&list=PL\\_CWSYH2QtJNr0j01\\_36rfPHqHs8HMQ\\_-&index=10](https://www.youtube.com/watch?v=DvImS7cCQLI&list=PL_CWSYH2QtJNr0j01_36rfPHqHs8HMQ_-&index=10)> Acesso em: 2 jul. 2020.