

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Teorema Fundamental do Cálculo

Uma abordagem histórica

Daniel Takeshi Tanno Takabataki

Professor: Oscar João Abdounur

São Paulo
2020

Sumário

Introdução	3
Cálculo diferencial: hoje, passado e modernidade	4
Cálculo integral: hoje, passado e modernidade	5
O teorema fundamental do cálculo	6
Considerações finais	7
Referências bibliográficas	8

Introdução

Duas ideias que, a princípio, não pareciam se relacionar se mostraram que constituem juntas a essência do cálculo. Aqui, em uma abordagem histórica, será possível dar uma olhada em como, desde a Grécia Antiga até a Era Moderna, o teorema fundamental do cálculo foi sendo desenvolvido pelos matemáticos que trabalhavam com retas tangentes e cálculo de área, entre outras questões; junto disso, vendo também os aspectos do cálculo atualmente.

Cálculo diferencial: hoje, passado e modernidade

Muitos ramos da ciência estudam objetos que se movimentam e mudam com o passar do tempo. À medida que uma bola rola morro abaixo, por exemplo, sua posição se altera. A taxa de mudança de posição é a velocidade. É claro, porém, que esta também pode mudar. A taxa de mudança da velocidade é chamada aceleração. Assim, surge a pergunta: a partir de uma fórmula matemática que descreve a posição da bola, é possível calcular sua velocidade e sua aceleração? O problema geométrico consiste em começar com uma linha curva no plano e determinar sua inclinação em um ponto qualquer. Se a curva é o gráfico da posição de uma bola no tempo, então sua inclinação representa a velocidade da bola.

Desde a época de Arquimedes, os gregos já conheciam a reta tangente como sendo uma reta que intercepta uma curva em um único ponto, generalizando a situação observada no caso da circunferência. Porém, apenas se conheciam métodos aproximados e geométricos para calcular a tão importante inclinação da curva.

No fim do século XVII, Isaac Newton e Gottfried Leibniz desenvolveram separadamente o cálculo, um magnífico conjunto de regras para descrever a inclinação de gráficos e ideias relacionadas, que viria a se tornar um ramo da matemática que descreve como sistemas e outras construções matemáticas evoluem no tempo (ou segundo algum outro parâmetro). A descoberta do cálculo por Newton e Leibniz é um dos momentos mais importantes da história da matemática. Da criação de modelos climáticos e econômicos à mecânica quântica e à teoria da relatividade, uma enorme quantidade de aplicações da matemática ao mundo físico é expressa com o auxílio de equações diferenciais e estudada por meio do cálculo.

Cálculo integral: hoje, passado e modernidade

Calcular a área de um retângulo pode ser uma tarefa fácil, mas de uma elipse por exemplo, não tanto. Uma ideia para isso é cobrir a elipse com vários quadrados, tentando fazer o melhor preenchimento para obter uma melhor aproximação na medida. É imaginável que, quanto menores forem os quadrados, melhor será o preenchimento e, assim, melhor a medição. Mas é concebível um método matemático mais consistente para obter-se um valor exato para a área de uma elipse ou ainda de uma figura mais complicada? É certo que a ideia está relacionada com fazer o melhor preenchimento possível da área a ser determinada.

Ainda na Grécia Antiga, já se tinha um método para calcular a área de uma circunferência, em que se inscrevia e circunscrescia uma sequência de polígonos regulares, de modo que o último convergiria para a referida área (de acordo com a reflexão de Eudoxo). Mesmo assim, essa ideia não é bem descrita por uma expressão matemática, visto que não se tinha na época uma formulação para limite.

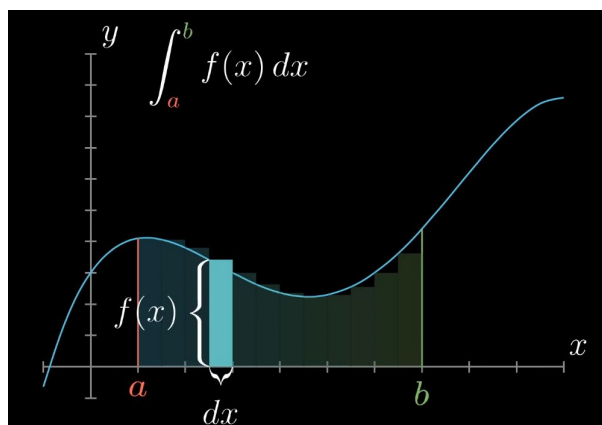
A partir de Leibniz e Newton, houve um grande avanço nesse assunto, em que um método viria a se chamar de integração, vindo com o conceito de integral. Isso constituiu uma parte essencial do cálculo, com a qual é mesmo possível ter a descrição da área abaixo de uma curva (no plano cartesiano). Porém, enquanto providenciaram uma abordagem sistemática nesse método, nos seus trabalhos faltava um grau de rigor. Com o desenvolvimento de limites, o cálculo adquiriu uma base mais firme. A integração foi formalizada rigorosamente pela primeira vez, usando limites, por Riemann. Depois, os conceitos de integral evoluíram mais um pouco com outros matemáticos, expandindo para outros subcampos da matemática. Dessa forma, diversos campos da física, da matemática e da engenharia hoje têm como um de seus operadores a integral, que pode ser aplicada desde as questões mais intuitivas, como no cálculo da área de um terreno ou do volume de um sólido, até as mais analíticas, como no cálculo da altura média de uma função, em um dado intervalo, em relação à abscissa.

O teorema fundamental do cálculo

Nota-se as duas vertentes do cálculo: começando com uma curva, o cálculo diferencial informará sua inclinação, ao passo que o cálculo integral descreve a área abaixo da curva. De forma inesperada, esses são procedimentos opostos, um fato conhecido como o teorema fundamental do cálculo. Seu desenvolvimento veio com mais consistência a partir dos trabalhos de Newton e de Leibniz, formalizando essa relação tão importante — a princípio, não intuitiva — entre a derivada e a integral.

Em geral, ao se querer hoje integrar de a a b alguma função $f(x)$ (com a ideia de somar os valores $f(x) \cdot dx$ ^[1] para os valores de entrada em $[a, b]$ e questionar ao que essa soma se aproxima quando dx tende a zero), o primeiro passo é achar uma antiderivada, uma outra função $F(x)$, cuja derivada é $f(x)$, definida e contínua em $[a, b]$. Então, a integral (a função $f(x)$ integrada) é igual a essa antiderivada avaliada em b menos seu valor em a . Esse é o teorema fundamental do cálculo.

Então, visualmente, o teorema:



[1] Figura 1: integral definida de $f(x)$ aproximada pela soma de retângulos de área $f(x) \cdot dx$.

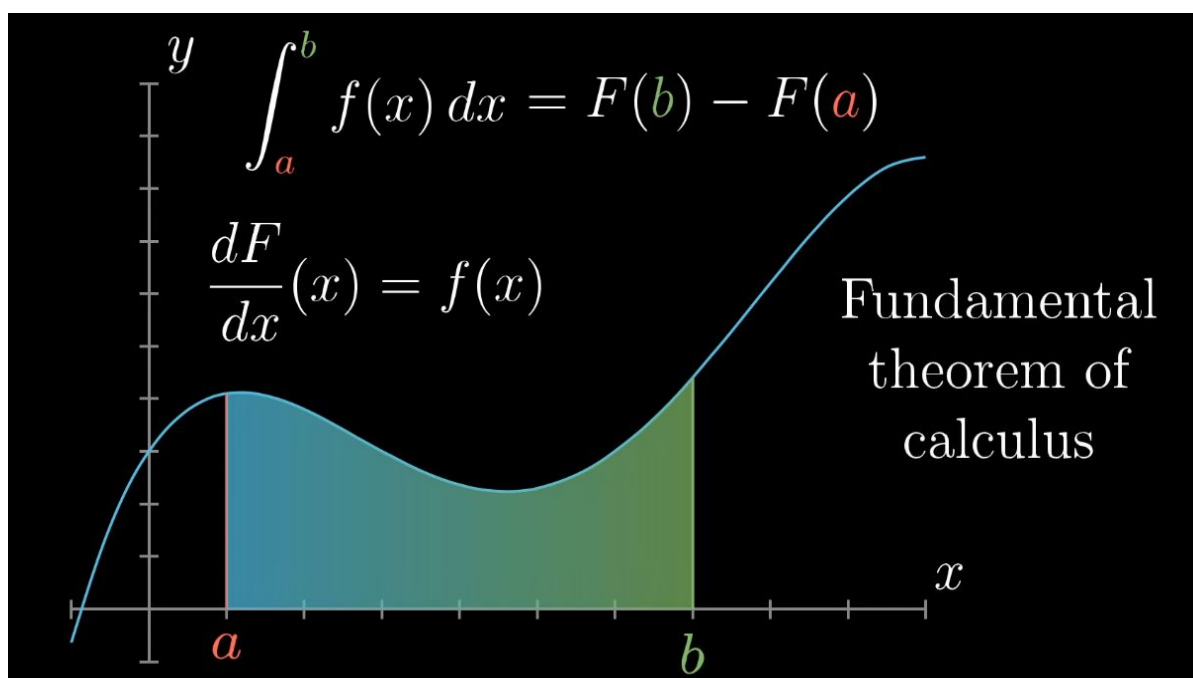


Figura 2: o teorema fundamental do cálculo.

Considerações finais

Desde a Idade Antiga, na Grécia, já se tinha fortes conhecimentos relacionados com os conceitos de cálculo atuais, mas que se encontravam limitadas a aproximações. Se antes o cálculo engatinhava impreciso, na Era Moderna deu um salto com Newton e Leibniz, apoiados nos trabalhos de outros matemáticos ao longo da história. Eles formalizaram as soluções para os problemas da inclinação da reta e o da área abaixo de uma curva. Com tantos esforços sendo empregados na matemática, esta tinha a atenção do seu tempo voltada para si e, por consequência, muitas descobertas nela. Foi nesse contexto que cresceu e tomou forma o teorema fundamental do cálculo. Hoje, é possível contemplar a sutileza dessa relação e compreendê-la muito, e os resultados de suas aplicações são de valor grandioso.

Referências bibliográficas

Matemática: 50 conceitos e teorias fundamentais explicadas de forma clara e rápida _ 1. ed. _ São Paulo: Publifolha, 2014.

História Derivadas - E-Calculo - USP. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm. Acesso em: 1º jul. 2020.

LOPES, Mike Jhonatan Dias. **História da Matemática: Construção da Integral de Riemann e Aplicações no Geogebra.** 2018. Disponível em: https://bdm.ufpa.br:8443/jspui/bitstream/prefix/724/1/TCC_HistoriaMatematicaConstrucao.pdf. Acesso em: 1º jul. 2020.

Integral. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Integral#History>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Fundamental theorem of calculus. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_calculus#History. Acesso em: 13 jul. 2020.

3Blue1Brown. **Integration and the fundamental theorem of calculus.** 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rfG8ce4nNh0>. Acesso em: 14 jul. 2020