Cálculo 1 - MAT0111

Trabalho Histórico Matemático

"Equações do 2^{o} grau"

Prof^{o}. Dr. Oscar Joao Abdounur

Aluno: Eduardo Monteagudo de Campos n^{o}USP 11809235

15 de julho de 2020

Resumo

O presente trabalho tem o objetivo de realizar uma breve passagem histórica, apresentando a evolução das soluções das equações quadráticas, desde o mundo egípcio até os dias atuais. Assim como expressar as técnicas e novas ferramentas de análise introduzidas com o advento do cálculo diferencial integral.

A partir dessa caminhada pela linha do tempo mostrar **como o cálculo facilitou a análise das equações de 2º grau.**

Sumário

1 Análise Histórica da Equação do 2º Grau **4**

1.1 Os egípcios 4

1.2 Os babilônios 5

1.3 Os gregos 6

1.4 Os hindus 6

1.5 Os árabes 7

1.6 Os chineses 8

1.7 Os europeus 8

1.8 Na atualidade 8

2 O Cálculo e as equações de 2º Grau **8**

2.1 Quadratura da Parábola 9

2.2 Vértices da Parábola 10

2.3 Multiplicidade das raízes 11

3 Considerações Finais **12**

1 Análise Histórica da Equação do 2º Grau

1.1 Os egípcios

Na antiguidade o papel da matemática estava quase sempre ligado a medição de terras e no Egito não era diferente. O fato de sua localização as margens do rio Nilo dava àquela terra uma grande importância econômica e estratégica.
As primeira evidências de documentos que comprovam a resolução de problemas matemáticos são oriundos dos *papiros de Moscou (aproximadamente 1890 a.C.) e Rhind (aproximadamente 1.650 a.C).*

Nestes papiros estavam presentes problemas práticos com suas respectivas soluções do cotidiano do mundo egípcio.

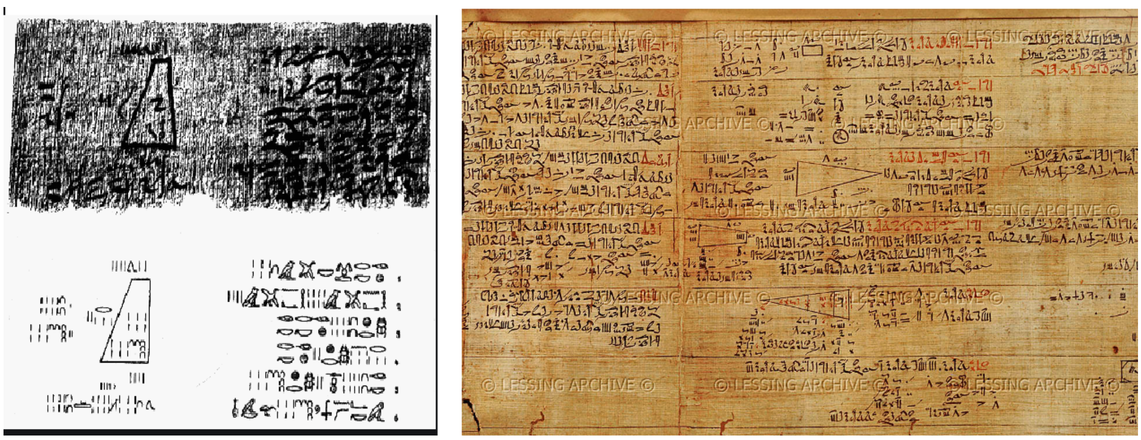

Figura 1: Papiro de Moscou (esq) e papiro de Rhind (dir)

Não existe registro nos papiros de soluções de problemas de equações do 2ºgrau, entretanto dizem que eles elaboraram um método semelhante ao utilizado para as equações de 1º grau para encontrar soluções do tipo: $x^2+y^2=k$ e $y=ax$, onde k e a são constantes positivas.(*BOYER*, 1996)
<u>Exemplo retirado do papiro</u> A soma das áreas de dois quadrados é 100. O triplo do lado de um deles é o quádruplo do lado do outro. Qual os lados desse quadrado.

Utilizando a matemática dos dias de hoje a simbologia seria:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ y=\dfrac{4}{3}x \end{cases}$$

O procedimento utilizado para a resolução do problema é:

1 - Tome x = 3, então, y = 4

2 - Assim, $3^2 + 4^2 = 25 \quad (25 \neq 100)$

3 - $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$

4 - 10÷5=2

5 - Os lados são $2 \times 3 = 6$ e $2 \times 4 = 8$

1.2 Os babilônios

Os babilônios são uma civilização que pertencem ao mesmo período dos egípcios. Entre eles era muito comum a solução de problemas dados o produto de dois números. Dessa maneira os historiadores acreditam que os babilônios tinham um conhecimento matemático muito além quando comparados com outros povos da mesma ápoca. Os babilônios possuíam métodos de resolução de equações quadráticas e bi-quadráticas, fórmulas para cálculos de áreas e volumes rudimentares para os casos mais simples. Alguns destes conceitos podem ser verificados nas tábuas de Plimpton 322. Os babilônios enun-

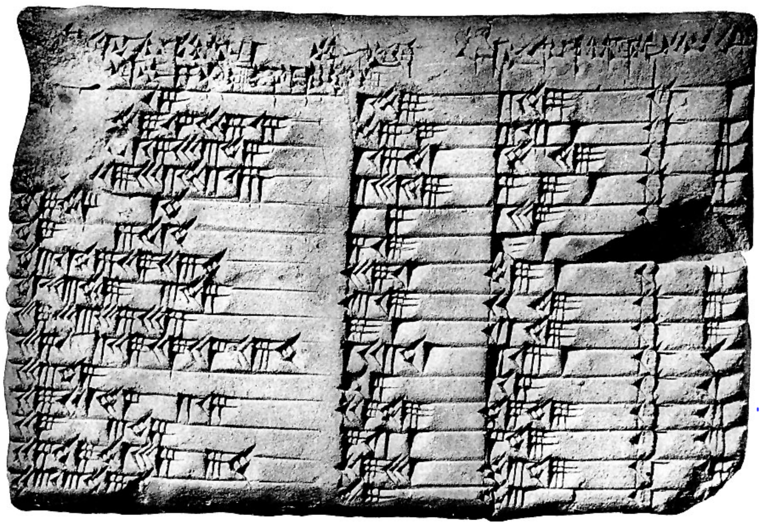

Figura 2: Tábuas de Plimpton 322

ciam o problema e o solucionavam por meio de uma resolução de palavras, como por exemplo:

Exemplo Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870?

O método de solução seria o seguinte: Tomando a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplicando por ela mesma, (0,5 × 0,5= 0,25).

Somando o resultado a 870. Obtém-se um quadrado perfeito ($870,25 = 29,5^2$) cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30), o lado do quadrado procurado.

1.3 Os gregos

A matemática praticada até então estava baseada na tentativa de resolução de problemas práticas que apareciam no cotiano. Com os gregos, a matemática passa a ser tratada através de conceitos, axiomas e teoremas elaborados por eles mesmos, criando uma melhor fundamentação matemática.

A dificuldade com o tratamento de números racionais e irracionais e a própria ideia do infinito, fez com que os gregos possuíssem um gosto natural pela geometria, levando esta civilização a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, inclusive as equações de $2^{\underline{o}}$grau. Com grande destaque pode-se citar o presença em "Os Elementos"de Euclides proposições de resolução geométricas de equações do $2^{\underline{o}}$ grau.

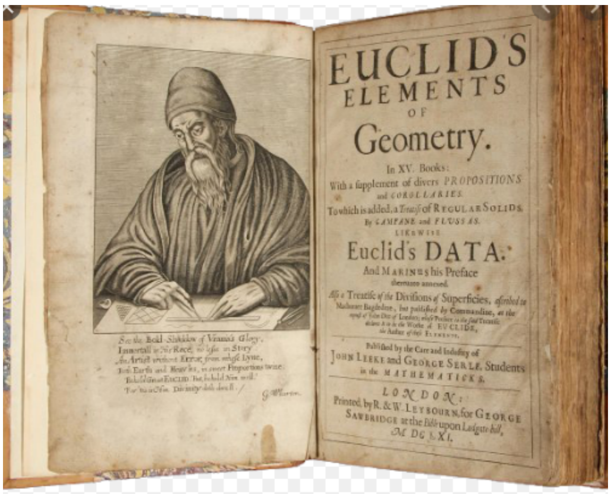

Figura 3: Elementos - Euclides

1.4 Os hindus

Da mesma maneira que as outras civilizações a matemática surgia para simplificar e resolver as situações cotidianas que recaíam em problemas matemáticos.

Dentre os expoentes indianos que surgiram pode-se citar como o de maior destaque que estudou modelos simplificados na resolução de equações o hindu Bhaskara.

Segundo o próprio Bhaskara a regra que soluciona a equação de $2^{\underline{o}}$ grau e que originou a famosa fórmula era devido a Sridhara, entretanto, curiosamente é chamada de

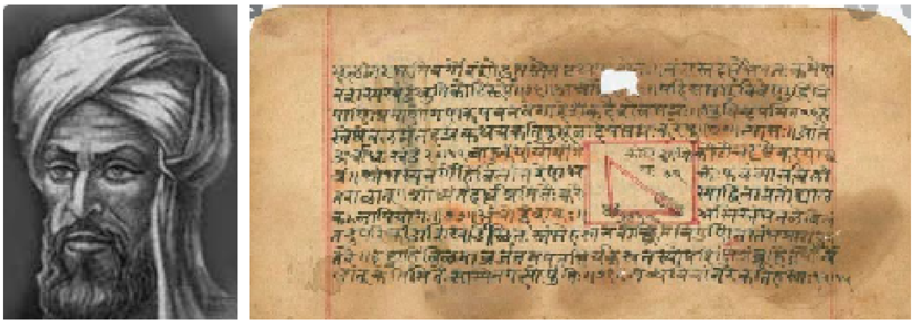

Figura 4: Lilavati e Bhaskara

fórmula de Bhaskara somente no Brasil.

> A obra Lilavati, de Bhaskara, contém muitos problemas que são resolvidos por equações do segundo grau. Muitos foram compilados da obra indiana de Brahmagupta, e Bhaskara acrescentou novas observações. Talvez seja por esse motivo que a fórmula de resolução de uma equação do segundo grau ficou conhecida, aqui no Brasil, como fórmula de Bhaskara. Mas sabe-se que essa forma de resolução apresentada em Lilavati foi encontrada por Bhaskara em documentos que datam de século XI, um século antes da publicação do Lilavati.(*BARROSO*, 2006, pag.48)

1.5 Os árabes

Depois dos gregos e dos mesopotâmios, os árabes apareceram no estudo e no aprimoramento da matemática que possuíam como base de sustentação eram as obras escritas por Euclides, Apolónio, Herão, Diofanto.

Importante apontar que boa parte do conhecimento deixado pelos gregos e babilônios foi perdido devido as invasões que ocorreram. Nesse sentido está incluída a destruição da biblioteca de Alexandria que representou um atraso do conhecimento da humanidade sem precedentes. Apesar da destruição, algumas obras foram preservadas pelos árabes e posteriormente estudadas pelos árabes que mais tarde dariam a biblioteca da Sabedoria, um marco para os matemáticos árabes. Os matemáticos que apresentaram maiores contribuições foram os Al-Khowarizmi, Abu Kamil, Al-Khayyam e Al-Qalasadi, e dentre esses Al-Khowarizmi,(*EVES*, 1995) apresentou resultados importantes no estudo e resolução da equação do 2º grau.

1.6 Os chineses

Se comparados com os outros povos da mesma época, os chineses desenvolveram estudos e resultados muito diferentes oque se pode inferir que o estudo da matemática se deu de forma independente e diferente. Em 1303, o matemático chinês Chu Shih-chieh, publicou seu livro *Ssu-yüan yá-chien* (Precioso espelho dos quatro elementos) uma maneira diferente de resolução de equações quadráticas. Essa técnica tinha por base aproximações sucessivas, denominada método fan-fan, cuja solução era uma raiz positiva.

1.7 Os europeus

Ao longo do tempo, a técnica predominante para resolução das equações quadráticas recaiam na técnica do hindu Bhaskara. Entretanto, a partir do século XV até o século XVII, matemáticos ganharam notoriedade na busca de outras maneiras de resolução. Destaca-se as abordagens dadas por Viète e Descartes.

François Viète (1540-1603) propunha mudanças de variáveis. René Descartes (1596-1650) trabalhava no desenvolvimento para uma solução geométrica para solução da raiz positiva.

1.8 Na atualidade

Atualmente, as escolas brasileiras, introduzem o método de resolução baseado nos hindus. Pode-se resolver de maneira algébrica, qualquer tipo de equação polinomial do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, por meio do seguinte modelo: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Embora existam outras formas de expor o conteúdo (incluindo algébricos e geométricos), dificilmente, um estudante brasileiro se deparará em seu ensino fundamental com outra maneira de resolução.

2 O Cálculo e as equações de 2º Grau

Muito antes do próprio cálculo ter sido formulado, muito das suas ideias foram aplicadas. Um exemplo disso é o próprio método de exaustão, também conhecido como princípio de Eudóxio-Arquimedes, assim chamado por ter na base a teoria das proporções apresentada pelo Eudóxio e por ter Arquimedes como um matemáticos que mais deu notoriedade a ela. Eudóxio apresentou a sua teoria de modo a ultrapassar a barreira que se mostrava a frente dos gregos imposta pelos incomensuráveis, que não conseguia ser explicada pela teoria das proporções dos pitagóricos. Arquimedes utilizou disso para o cálculo de diversas áreas e volumes de figuras geométricas. O método de exaustão é fundamental para o conceito do infinitesimal aplicado ao cálculo. Entretanto, enquanto do cálculo a soma de parcelas é infinita, Arquimedes realizada uma soma finita de termos. Para o desenvolvimento de uma soma infinita seria necessário o conceito de número real que os gregos não possuíam

Com o advento do cálculo, muitas análises e informações podem ser estudadas a partir das equações quadráticas. Através da aplicações dos ferramentais do cálculo, pode-se estudar o vértice de uma parábola, pontos de máximos e mínimos, bem como a multiplicidade de suas raízes.

2.1 Quadratura da Parábola

Arquimedes foi capaz de mostrar a maneira de se caldular a área de um segmento de parábola. Esta área é delimitada por um segmento qualquer de parábola e um segmento que une as duas partes da curva, conforme abaixo. Arquimedes conseguir demonstrar que

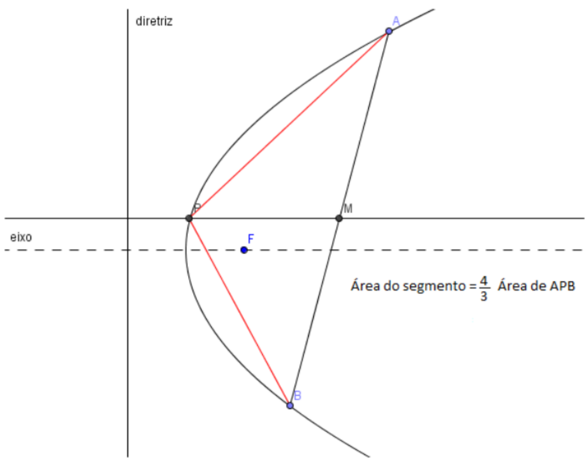

Figura 5: Área da quadratura da parábola

a área do segmento de parábola $\vec{AB}$ é igual a 4/3 da área do triângulo inscrito. Trata-se de um resultado obtido por articuladas combinações da geometria eucliadiana aliado ao método de exaustão.

Pode-se inferir que os gregos estiveram a um pequeno passo do "descobrimento"do cálculo dois séculos antes de Cristo. Faltava-lhes a noção do infinito. O problema da quadratura da parábola aliado ao método de exaustão demonstra a evolução no tratamento de somas infinitas.

2.2 Vértices da Parábola

Com o advento do cálculo o estudo das parábolas ganha novas ferramentas que otimizam e facilitam o entendimento. A noção de derivada como uma taxa de variação de uma grandeza permite inferir através do gráfico de uma equação do 2º qual a abscissa em que se encontra o ponto de máximo ou mínimo. Esta-se falando de seu vértice. Sabe-se que o ponto em que a parábola possui o vértice, a derivada de sua função se anula, já que a inclinação da reta tangente que ali passa é paralela ao eixo das abscissas, assim teremos que: Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

O ponto em que $\frac{df}{dx} = 0$ é o ponto em que a derivada se anula, portanto o seu vértice. Assim, temos que:

$$\frac{df}{dx} = 2ax + b = 0 \to x = \frac{-b}{2a}$$

Substituindo esse valor de abscissa na função, tem-se que a corrdenada para o vértice será dado por $\frac{-b^2+4ac}{4a}$. Assim, o vértice da parábola será dado por:

Vértice $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

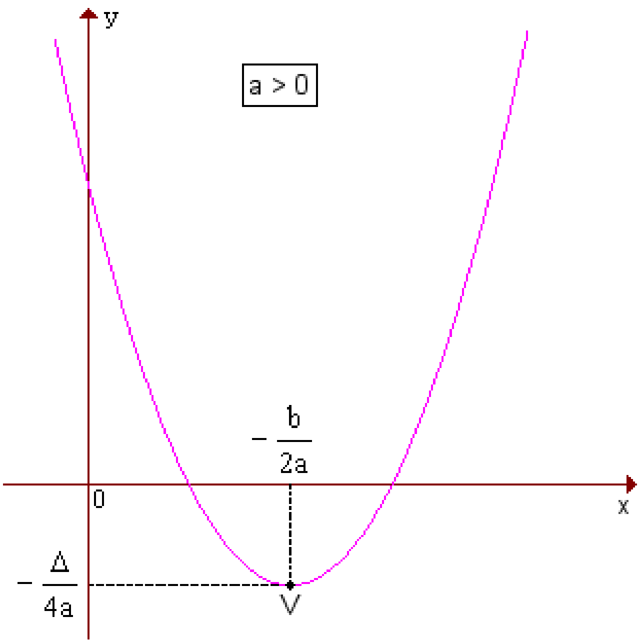

Figura 6: Vértice da parábola a partir do cálculo

2.3 Multiplicidade das raízes

As raízes de uma equação do 2º grau podem ser distintas ou não. Caso forem iguais, teremos uma raiz com multiplicidade dois. Pode-se utilizar o cálculo para prever situações como essas. Uma raiz com multiplicidade dois, além de ser raiz da própria função é também raiz da função derivada. Seja uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com $a \neq 0$ Se $f(x_1) = f'(x_1) = 0$, x_1 é uma raiz de multiplicidade 2.

As raízes de multiplicidade 2 são aquelas que tangenciam o eixo das abcissas. Deste modo, neste ponto, além da função ter o valor de 0, a inclinação da reta tangente que passa por esse ponto, também é nula.

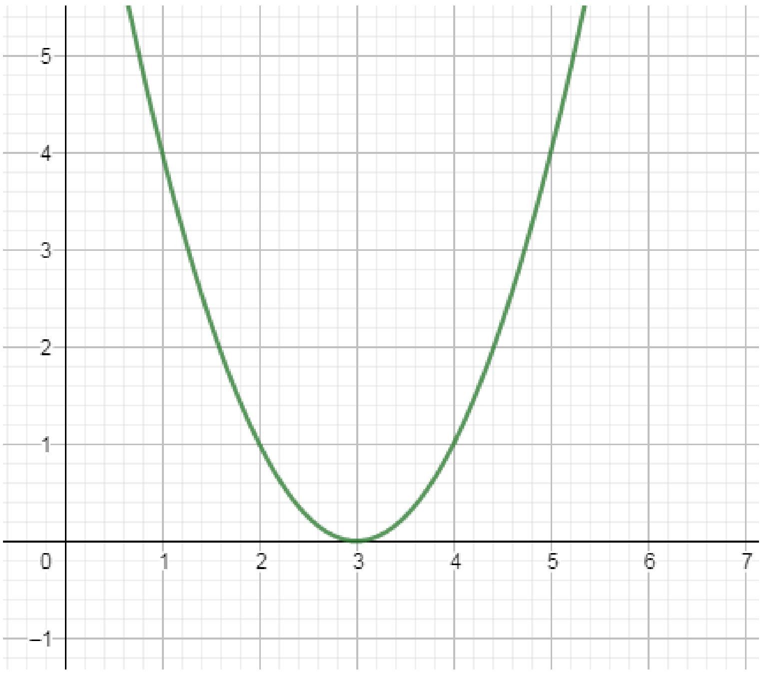

Figura 7: multiplicidade 2 da raiz x=3

No exemplo acima pode-se observar que no ponto $x = 3$, tanto a função quanto a sua derivada tem valor nulo. Portanto este ponto é um ponto de multiplicidade 2.

3 Considerações Finais

Através do trabalho pode-se perceber que a matemática é um conhecimento que é construído ao longo dos tempos com contribuições de diferentes tipos de povos. A evolução do estudo da equação de 2º grau é um exemplo.

Importante notar também que o ensino de matemática, largamente difundido nas escolas, quase que omite os enormes esforços e tentativas ao longo dos anos para que a fórmula de bhaskara, assim conhecida no Brasil, como que se fosse mágica, possa ser utilizada.

Dessa forma, poder estudar a história da equação permite criar no estudante uma nova percepção de como a teoria por trás da fórmula gelada foi criada e desenvolvida, gerando-se assim uma nova percepção da teoria.

O cálculo é mais um exemplo de como a matemática vai sendo criada e desenvolvida através do tempo, pois com o seu advento, a análise e desenvolvimento das equações tornaram-se mais facilitadas. Sem o cálculo o estudo das equações de 2º grau e consequentemente dos polinômios no que tange aos métodos de valores máximos e mínimos das funções, multiplicidades das raízes, possivelmente, seriam prejudicados.

Referências

BARROSO, J., *Projeto Araribá: Matemática*, 1 ed ed., 2006.

BOYER, C., *História da Matemática*, 2 ed ed., 1996.

EVES, H., *Introdução à História da Matemática*, 1 ed ed., 1995.