

Prof. Dr. Oscar João Abdounur  
Instituto de Física  
Universidade de São Paulo  
Richard Alexandrino de Macedo, 11811030

# Trabalho I – Teorema de Pitágoras

## Sumário:

- Definição
- Alguns Corolários
- Pitágoras
- Teorema na História
  - No Egito
  - Na Mesopotâmia
  - Na Índia
  - Na China
  - Na Grécia
- Ternos Pitagóricos
- A Incomensurabilidade
- Relação com o Cálculo Diferencial e Integral
- Curiosidades
- Referências

## Definição:

É uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, sendo a hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto e os outros dois lados do triângulo, os catetos.

Não é válido para triângulos acutângulos ou obtusângulo, apenas para os retângulos. Para que um triângulo seja considerado retângulo, basta que um de seus ângulos tenha medida igual a  $90^\circ$  (ângulo reto).

Se repararmos, o teorema é um caso particular da lei dos cossenos, do matemático persa Ghiyath al-Kashi (1380 – 1429).

## Alguns Corolários (afirmações deduzidas de uma verdade já demonstrada):

“Em qualquer triângulo retângulo, a hipotenusa é maior que qualquer um dos catetos, mas menor que a soma deles.”

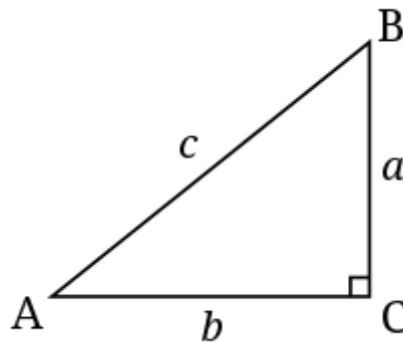


Figura 1 – Triângulo retângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

“Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos.”

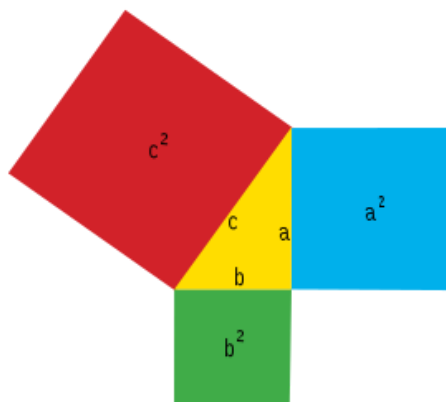


Figura 2 – Triângulo retângulo e as áreas formadas por cada um de seus lados.

“Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.”

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Onde  $c$  é a hipotenusa,  $a$  e  $b$  representam os outros dois lados.

### Pitágoras:

Foi um filósofo e matemático grego jônico, que nasceu em 570 a.C. e morreu em 495 a.C.

É creditado por descobrir e demonstrar o teorema, apesar de muitos argumentarem que o conhecimento já era usado por matemáticos babilônicos.

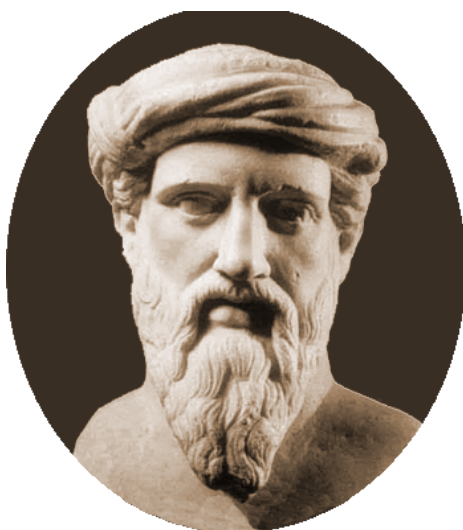


Figura 3 – Pitágoras de Samos.

### Teorema na História:

- *No Egito:*

O historiador da matemática Moritz Cantor, alemão, tomando por base que  $3^2+4^2=5^2$  era conhecido dos egípcios e que eles usavam cordas em agrimensura, especulou que eles construíam ângulos retos por meio de um uma corda com nós para formar um triângulo de lados 3, 4 e 5. Bartel van der Waerden afirmou que não há evidências que sustentem esta especulação, visão compartilhada por Thomas Little Heath.

- *Na Mesopotâmia:*

Há provas que os antigos babilônios já conheciam o teorema muito antes de Pitágoras. Tabletes de barro do período de 1800 a.C. a

1600 a.C. foram encontrados e estudados, estando hoje em vários museus. Um deles, Plimpton 322, mostra uma tabela de 15 linhas e 3 colunas, ilustrando trios pitagóricos.

- **Na Índia:**

O *Sulba Sutra* escrito por Baudhayana entre os séculos VIII a.C. e II a.C., contém uma lista de trios pitagóricos descobertos algebricamente, um enunciado do teorema de Pitágoras, e uma demonstração geométrica deste para um triângulo retângulo isósceles. O *Sulba Sutra* de Apastamba (600 a.C.) contém uma demonstração numérica do caso geral do Teorema de Pitágoras, usando cálculo de áreas. Van der Waerden acreditava que esta demonstração “estava certamente baseada em tradições antigas”. Carl Benjamin Boyer pensava que os elementos achados no *Sulba Sutra* deviam ter raízes mesopotâmicas.

- **Na China:**

O teorema também já era conhecido cerca de 600 anos antes do período Pitagórico. O problema “Gou Gu”, do famoso livro chinês *Zhoubi Saunjing* é uma evidência da existência de conhecimento a respeito do teorema.

- **Na Grécia:**

Pitágoras usou métodos algébricos para construir trios pitagóricos, de acordo com os comentários de Proclo sobre Euclides. Proclo, porém, escreveu entre os anos 410 e 485 d.C. Segundo Sir Thomas L. Heath (1861 – 1940), não existe nenhuma atribuição específica do teorema a Pitágoras na literatura grega que se conserva dos cinco séculos posteriores à época em que Pitágoras viveu. No entanto, quando autores como Plutarco e Cícero atribuíram o teorema a Pitágoras, fizeram-no de tal forma que sugeria que esta atribuição era amplamente conhecida e livre de qualquer dúvida. “Se esta fórmula é corretamente atribuída ao próprio Pitágoras, [...] pode-se assumir, com certeza, que pertence ao período mais antigo da matemática pitagórica”.

Segundo Proclo, por volta do ano 400 a.C. Platão forneceu um método para encontrar trios pitagóricos que combinava álgebra e geometria. A demonstração axiomática do teorema mais antiga que se conhece aparece nos *Elementos* de Euclides, que data aproximadamente do ano 300 a.C.

## Ternos Pitagóricos:

Também chamados de trios pitagóricos, são uma sequência numérica na qual três elementos inteiros e positivos se encaixam perfeitamente no Teorema de Pitágoras. Ou seja, dois números que elevados ao quadrado e somados resultarão em um quadrado perfeito e, conseqüentemente, em uma raiz com número inteiro, tais que  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Ternos pitagóricos primitivos até 100:

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (12, 35, 37), (13, 84, 85), (16, 63, 65), (20, 21, 29), (28, 45, 53), (33, 56, 65), (36, 77, 85), (39, 80, 89), (48, 55, 73), (65, 72, 97).

## A Incomensurabilidade:

Pitágoras acreditava que seu teorema tinha uma “falha” que diziam que ele mesmo tentava esconder. Quando os catetos eram iguais, não havia um resultado racional. Hipaso de Metaponto, seu seguidor, teria demonstrado, provavelmente de forma geométrica, a raiz de 2, mas Pitágoras considerava que a raiz de 2, ou qualquer outro irracional, “maculava” a beleza dos números, portanto não poderiam existir. Mas como ele não conseguia refutar, condenou Hipaso ao afogamento. Os que o sucederam não compreendiam o porquê da incomensurabilidade. Os irracionais ficaram na obscuridade por anos e só voltaram a ser estudados com Eudoxo de Cnido. O décimo livro da série Os Elementos, de Euclides, é dedicado à classificação dos irracionais. Só em 1872, com Dedekind, os irracionais entraram, em termos rigorosos, na aritmética.

## Relação com o Cálculo Diferencial e Integral:

Além de inúmeras maneiras de se aplicar o teorema durante o curso, há também uma forma de demonstrar o mesmo com o uso do cálculo diferencial, em uma interpretação baseada na métrica, usando os comprimentos, mostrando como mudanças em um lado podem produzir mudanças na hipotenusa, usando um ponto de cálculo. Assim:

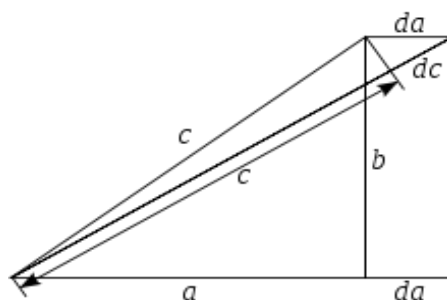


Figura 4 – Demonstração do Teorema de Pitágoras com o uso do cálculo diferencial e integral.

como resultado da mudança  $da$  no lado  $a$ , por semelhança de triângulos e para mudanças diferenciais:

$$da/dc = c/a$$

separando as variáveis:

$$c \cdot dc = a \cdot da$$

integrando ambos os lados:

$$c^2 = a^2 + constante$$

quando  $a=0$ , então  $c=b$ . Sendo assim a constante será  $b^2$ . Logo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

### Curiosidades:

- Há diversas formas de demonstrar o teorema. O livro *The Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis, por exemplo, contém 370 demonstrações diferentes.

- Há demonstrações no livro *Os Elementos*, de Euclides.

- Outras demonstrações vieram de Albert Einstein, Bhaskara Akaria, de Leonardo da Vinci, James A. Garfield.

- Algumas formas de demonstrar o teorema são: por comparação de áreas, por semelhança de triângulo, por cálculo diferencial, num espaço com produto interno, por rearranjo das partes, etc.

- Não se sabe ao certo qual foi a demonstração utilizada por Pitágoras.

- É a relação geométrica mais utilizada na matemática.

- Arquimedes utilizou o teorema para deduzir o valor de pi e Descartes para a distância entre dois pontos.

### Referências:

- BOGOMOLNY, Alexander. *Pythagorean Theorem. Cut the Knot*. Disponível em: <[cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml](http://cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml)>. Acesso em 04 de julho de 2020.

- Pythagoras's theorem in Babylonian mathematics. *MacTutor History of Mathematics Archive*. Disponível em: <[mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian\\_Pythagoras/](http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_Pythagoras/)>. Acesso em 04 de julho de 2020.