Teoria das proporções de Eudoxo e os incomensuráveis

Victor K. Arashiro

Julho 2020

A matemática está em desenvolvimento desde os povos da Mesopotâmia e Egito Antigo. Sistemas de numeração avançados eram utilizados em diversas atividades administrativas, cálculo de áreas e volumes de recipientes e terras já ocorriam com auxílio de elementos da geometria. Apesar da vasta utilização prática desde, aproximadamente, 2000 a.C., é da Grécia Antiga os primeiros relatos da matemática adquirindo um corpo teórico e abstrato, buscando o conhecimento dos números e suas relações sem fins práticos.

Um retrato desse tempo é a existência de uma ordem que cultuava o Número. Os estudos da matemática e filosofia eram as bases das vidas dos pitagóricos, através dele perceberam que podiam fugir da limitações dos sentidos, e que existia muito mais além do que era visível. É dentro dessa sociedade que nos aprofundamos no nosso primeiro tópico, os incomensuráveis.

Os incomensuráveis

No livro X dos Elemento de Euclides [1] grandezas comensuráveis são definidas como:

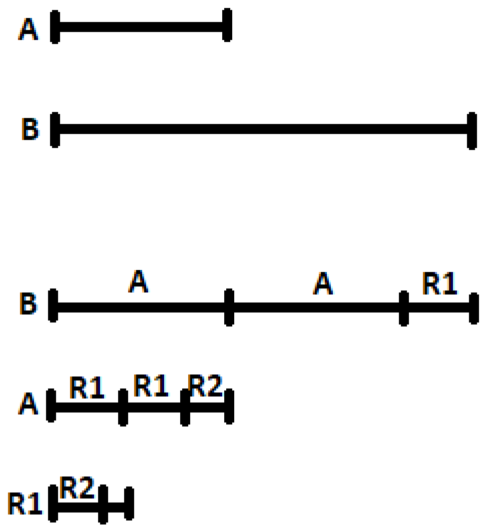
> "*Grandezas comensuráveis são medidas pela mesma medida, mas grandezas que não admitem uma medida em comum são chamadas de incomensuráveis.*"

Há uma alegação, contestada, que como os pitagóricos pesquisavam nos números inteiros e nas suas frações os "segredos do universo", a revelação de razões de grandezas incomensuráveis (por exemplo a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado) causou um abalo na comunidade pitagórica: "Era um princípio fundamental do Pitagorianismo que a essência de tudo, na geometria, assim como, na afazeres práticos e teóricos do homem, fosse explicável em termos de *arithmos*, ou propriedades intrínsicas dos números inteiros ou suas razões. [...] a comunidade matemática grega foi atordoada com uma descoberta que praticamente demolia as bases da fé pitagórica nos números inteiros." ([2], p. 65-66, tradução livre).

Por outro lado alguns historiadores dizem que a interpretação de que houve uma crise dos incomensuráveis ocorre quando analisamos anacronicamente: "a crise da incomensurabilidade parece só existir quando lemos os textos gregos com os nossos termos, esquecendo-nos de prestar atenção no modo como os atores históricos viam a matemática. Quando tentamos nos colocar no ponto de vista dos antigos gregos, em especial dos primeiros pitagóricos, os motivos para a crise como que desaparecem". [3]

Uma teoria do descobrimento dos incomensuráveis está ligada ao método da antifairese. Tal método tem a finalidade de encontrar o maior divisor comum entre duas grandezas, e é feito da seguinte forma: dadas duas grandezas, subtraia da maior um múltiplo da menor, tal que, o resto da subtração seja menor que a menor grandeza. Realize essa operação até que reste nada.

Com grandezas comensuráveis as etapas são finitas, porém quando são incomensuráveis o procedimento é infinito. Um exemplo das primeiras etapas desse método, com duas retas A e B, é dado a seguir:



Historiadores contrários à conjuntura da crise também mencionam que tal descobrimento não apenas produziu nenhum escândalo, e sim fomentou novas pesquisas matemáticas.

Teoria das Proporções de Eudoxo

Os Elementos, mencionado anteriormente, consistem em uma série de treze livros que compilam conhecimentos fundamentais no campo da matemática grega. Apesar de ser escrito por Euclides, a maioria dos teoremas apresentados não são de sua autoria (engloba trabalhos de Proclo, Pitágoras, Eudoxo, entre outros), porém ele é responsável por arranjá-los de uma forma que acordam a sucessões lógicas advindas de cinco axiomas.

A Teoria das Proporções de Eudoxo de Cnido, definido no livro V dos Elementos de Euclides) [1] trouxe um novo caminho para atacar o problema dos incomensuráveis. Primeiro Euclides estabele razão, na terceira definição deste mesmo capítulo, como:

> *"Uma razão é uma certa relação entre o tamanho de duas grandezas do mesmo tipo."*

Em outras palavras, α tem uma razão em relação a β se $m\alpha > \beta$ e $n\beta > \alpha$ para alguns m e n. E então determina a igualdade de razões (comensuráveis e incomensuráveis) na quinta definição:

> *"Grandezas são ditas na mesma razão, a primeira para a segunda, e a terceira para a quarta, quando equimúltiplos da primeira e da terceira ambos são maiores, iguais ou menores, que equimúltiplos da segunda e quarta, respectivamente, de acordo com qualquer multiplicação."*

Em notação atual, $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$ se e somente se $m\alpha > n\beta$ quando $m\gamma > n\delta$, $m\alpha = n\beta$ quando $m\gamma = n\delta$ e $m\alpha < n\beta$ quando $m\gamma < n\delta$, para qualquer m e n.

Essa definição genial remove a necessidade de saber os "números" que $\frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{\gamma}{\delta}$ representam (mesmo no caso de grandezas incomensuráveis) e $\frac{\alpha}{\beta}$ é igual a $\frac{\gamma}{\delta}$ quando dado quaisquer m e n, é respeitada a ordenação com os pares $m\alpha$, $n\beta$; e $m\gamma$, $n\delta$.

Tal teoria é tão notória que somente após dois milênios Richard Dedekind, em seu trabalho *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, formalizaria os números irracionais.

Irracionais por Richard Dedekind

Richard Dedekind foi um professor na Escola Politécnica de Zurique, durante suas aulas de Cálculo Diferencial percebeu a falta de fundações científicas na aritmética, como ele mesmo diz no prefácio do seu ensaio *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Continuidade e números irracionais) [4]:

> *"[...] eu tinha evidências geométricas. [...] Mas essa forma de introdução às Cálculo diferencial não pode ser considerada científica, ninguém pode negar. Essa sensação de disatisfação era tão dominante que eu me fiz meditar nessa questão até achar uma fundação puramente aritmética perfeitamente rigorosa dos princípios da análise infinitesimal."*

A formalização dos irracionais vem da ideia de que para todo a pertencente aos $\mathbb{Q}$, é associado um e somente um ponto p numa reta L. Esse p divide L em dois grupos infinitos P_1, em que todos p_1 integrantes desse intervalo estão à esquerda de p, e P_2, em que todos p_2 integrantes desse intervalo estão à esquerda de p, e o ponto p pode ser atribuído arbitrariamente a qualquer grupo. Importante ressaltar que qualquer p_1 está à esquerda de qualquer p_2.

Prosseguindo, sobre a continuidade da reta L, Dedekind diz:

> *"O mais importante é o fato da reta L possuir infinitos pontos correspondentes aos números não racionais. [...] A reta L é infinitamente mais rica em pontos do que o domínio $\mathbb{Q}$ em números. Se agora, como é nosso desejo, progredir aritmeticamente todos os fenômenos da reta, o domínio dos racionais é insuficiente e se torna absolutamente necessário que $\mathbb{Q}$ criado a partir dos números racionais seja essenciamente melhorado através da criação de novos números para que o domínio dos números ganhe a mesma complitude, ou digamos, a mesma continuidade, que a reta."*

Portanto toda vez que um número não racional determinar um corte de Dedekind (P_1, P_2), é criado um irracional α definido pelo corte (P_1, P_2), ou seja, α produz o corte (P_1, P_2).

Por exemplo, o corte (A, B) que representa $\sqrt{2}$ é

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2 \text{ ou } a < 0\}$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} : b^2 \geq 2 \text{ e } b \geq 0\}$$

.

Retornando ao Eudoxo, duas razões são iguais se e somente se produzem o mesmo corte de Dedekind, do mesmo modo, dois números são diferentes se produzem cortes de Dedekind diferentes.

Concluindo, o desejo de Richard Dedekind foi realizado, o cálculo diferencial atualmente possui um conjunto contínuo $\mathbb{R}$ com que conjecturar e teoremas provados puramente com os elementos da aritmética.

Referências

[1] Euclidis *Elementa*. Livro V, tradução em inglês por Richard Fitzpatrick.

[2] Boyer, C. e Merzbach, U. *A History Of Mathematics*. 3. ed. John Wiley & Sons, 2011

[3] Gonçalves, C. H. B. e Possani, C. *Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga*. Revista Matemática Universitária, v. 47, p. 16-24

[4] Dedekind R. *Essays on the Theory of Numbers*. Project Gutenberg.

[5] Roque, T. *História da Matemática*. Zahar Editora.

[6] Kistemann, M. C. J. *Sobre a Teoria das Proporções, o Método da Exaustão e os Incomensuráveis*. Revista de Educação Matemática, v. 11, 2018.

[7] Robertson, E. e O'Connor, J. *MacTutor History of Mathematics Archive*. Stanford University, Acessado em: 13 de julho de 2020.

[8] Center for the Study of Language and Information (CSLI) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, Acessado em: 13 de julho de 2020.