UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA - MATEMÁTICA

MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I

Professor: Oscar João Abdounur

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL APLICADO À GEOMETRIA EUCLIDIANA EM CONTEXTO HISTÓRICO-MATEMÁTICO

Maria Fernanda Marques 11257373

SÃO PAULO

2020

1. INTRODUÇÃO

A Geometria[1] é uma ciência matemática que estuda as medidas de áreas, comprimentos e volumes das figuras planas e/ou espaciais a partir de hipóteses e conceitos. Foi estudada, inicialmente, a fim de resolver problemas como delimitação de terrenos, o que caracterizava uma das várias questões cotidianas que os egípcios enfrentavam na época do Antigo Egito (EVES, 1997). A partir disso, foram desenvolvidos conceitos de figuras planas como retângulo, quadrado e triângulo.

Euclides de Alexandria foi o matemático responsável por reunir as obras de Tales, Pitágoras e Platão para formalizar o estudo da geometria, resultando, posteriormente, na elaboração da coleção de 13 livros denominados “Os Elementos”, em que apresenta axiomas e postulados[2] baseados nos conceitos de ponto, reta, plano.

2. OBJETIVO

Com base no exposto, este trabalho tem como principal objetivo estabelecer uma conexão entre a Geometria Euclidiana descoberta e estudada nos anos 300 a.C. (EVES, 1997) com o Cálculo Diferencial e Integral utilizado atualmente. Dessa forma, serão evidenciados os contextos históricos, sociais e culturais em que a geometria está inserida e a sua dependência com o cálculo.

3. DESENVOLVIMENTO

Segundo (MELCHIORS; SOARES, Maiêutica - Curso de Matemática, p. 67), os primeiros estudos sobre o cálculo diferencial e integral ocorreram em 1800 a.C e grandes matemáticos como Arquimedes, Kepler e Fermat contribuíram para o

[1]sua etimologia é o prefixo geo-, pelo vocábulo ge, que se refere à terra, e à palavra métrica, localizada no latim metrĭca em relação ao grego metrikḗ, ou seja, medição da terra
[2]ponto de partida de uma argumentação; premissa

desenvolvimento deste estudo. A partir do século XVII, Newton[3] e Leibniz[4] desenvolveram metodologias para o uso do cálculo de forma mais simplificada, essas que influenciaram matemáticos como Weierstrass, Riemann e Cauchy que, posteriormente, continuaram os estudos para aprimorá-lo.

Como mencionado, Isaac Newton e Gottfried Leibniz foram os precursores do estudo do cálculo, o que acarretou na disputa na paternidade do cálculo. Por isso, abaixo, será exposto a ordem cronológica dos fatos, os quais se referem aos problemas que aqui serão apresentados (GAYO, 2010):

Tabela 1 - Cronologia do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral

ANO	FATO
1666	Isaac Newton desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral
1676	Gottfried Willhelm Leibniz desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral utilizando uma simbologia diferente da utilizada, inicialmente, por Isaac Newton
1684	Leibniz fez uma publicação no periódico mensal Acta Eroditorum sobre problemas de máximos e mínimos

Fonte: (GAYO 2010)

A seguir, temos um exemplo que demonstra uma utilização do cálculo diferencial e integral dentro da geometria euclidiana plana. O problema se refere a uma aplicação de máximos e mínimos em polígonos.

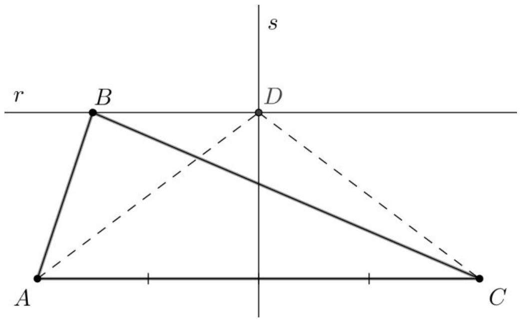
Enunciado: Entre todos os triângulos de mesma área, qual apresenta o menor perímetro?

<u>Demonstração:</u> Afirmamos que o triângulo é equilátero.

[3] Isaac Newton (1642 - 1727): foi um físico inglês
[4] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716): foi um cientista alemão

Dado um triângulo ABC de área constante, suponhamos que os lados AB e BC são diferentes. Então, seja r a reta que passa pelo ponto B e é paralela ao lado AC e seja o ponto D a intersecção da reta r com a reta s, perpendicular a reta r passando pelo ponto médio AC. Verifique a representação a seguir (Figura 1):

Figura 1: Fixando a área e minimizando o perímetro



Fonte: SANTOS (2013)

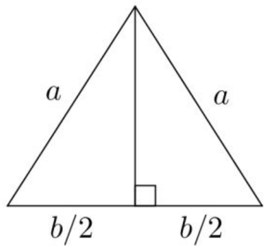
Pelo problema[5] de Heron de Alexandria, temos que o triângulos ADC tem perímetro menor que o triângulo ABC, mas por apresentarem a mesma base a mesma altura, têm a mesma área.

■

Pela demonstração acima, concluímos que o triângulo tem que ser isósceles. Portanto, provamos pela figura abaixo (Figura 2):

[5] problema de Heron de Alexandria: conforme (SANTOS, 2013), Heron de Alexandria viveu entre 150 a.C e 250 d.C e, propôs que: dados dois pontos P e Q situados em um mesmo semiplano determinado por uma reta r, a curva de menor comprimento ligando os pontos P e Q e tocando r é formada pelos segmentos de reta PA e AQ, onde A∈ r tal que os ângulos PÂN e NÂQ têm a mesma medida, onde AN é reta ortogonal a r, que tem origem A e que está do mesmo lado dos pontos P e Q [a demonstração está expressa em (SANTOS, 2013, páginas 6-8]

Figura 2: Triângulo isósceles solução do primeiro problema enunciado



Fonte: SANTOS (2013)

Então, a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{b}{2} \times \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \quad (1)$$

e o perímetro em função de b (0 < b < ∞) é dado pela função p(b), logo:

$$p\,(b) = b + 2\sqrt{\frac{4A^2}{b^2} + \frac{b^2}{4}} \quad (2)$$

Daí, tiramos que p(b) é função contínua, logo:

$$\lim_{b \to 0+} p(b) = \infty \quad (3)$$

e

$$\lim_{b \to \infty} p(b) = \infty \quad (4)$$

Portanto, a função p(b) tem que admitir um ponto de mínimo.

O uso de equações integrais para a determinação de áreas sob curvas de gráficos caracteriza a geometria diferencial, ou seja, representa uma aplicação do cálculo dentro da geometria.

Os estudos mais complexos nesse ramo foram realizados por Arquimedes de Siracusa[6] há 2300 anos, o que influenciou os fundamentos da teoria de integração de Riemann[7], conforme (MOHNSAM, 2014). Arquimedes desenvolveu o método do

---

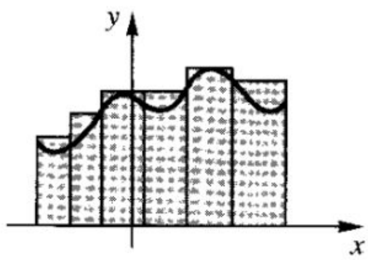
[6] Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C), matemático, físico, engenheiro e geômetra, nasceu por volta de 287 a.C. na cidade portuária de Siracusa, na Sicília

[7] Bernhard Riemann (1826 - 1866): foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial

equilíbrio para o cálculo de áreas e/ou volumes delimitados por curvas e, segundo (EVES, 2004), o procedimento deveria ser realizado seguindo:

> ... corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centróide conhecidos.

Figura 3: Representação da divisão da área sob a curva em fatias paralelas



Fonte: GUIDORIZZI (2011)

O método de equilíbrio utilizado por Arquimedes empregava o uso do momento[8] de um corpo para o cálculo da área e/ou volume e o método da exaustão era utilizado para formalizar e demonstrar os resultados.

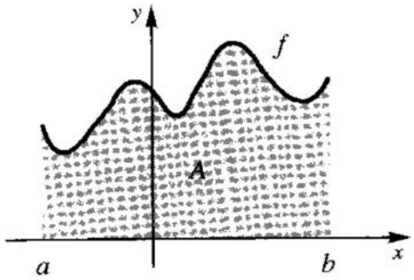
A partir disso, exemplificaremos abaixo como os conceitos de cálculos de área sob curvas são apresentados simultaneamente.

Definição: Segundo (GUIDORIZZI, 2001).

Seja f contínua em [a,b] com $f(x) \geq 0$ em [a,b]. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitados pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$. Considere a representação abaixo (Figura 3):

[8] o momento de um corpo está associado à uma força, F, que age sobre ele a fim de fazê-lo girar

Figura 4: Gráfico de f(x) delimitado em [a,b]



Fonte: GUIDORIZZI (2011)

Seja, então, P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, uma partição de [a,b] e seja $\overline{ci}$ e $\overline{\overline{ci}}$ em $[x_i - 1, x_i]$ tais que $f(\overline{ci})$ é o valor mínimo e $f(\overline{\overline{ci}})$ o valor máximo de f em $[x_i - 1, x_i]$.

Uma boa definição para a área A deve implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{ci})\Delta x_i$ (5) seja uma aproximação por falta da área de A e que $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{\overline{ci}})\Delta x_i$ (6) seja uma aproximação por excesso, isso é:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{ci})\Delta x_i \leq \text{área} \leq \sum_{i=1}^{n} f(\overline{\overline{ci}})\Delta x_i$$

Portanto, a integral definida de uma função f(x), num intervalo [a,b] é igual à área entre a curva de f(x) e o eixo dos x, neste caso:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \quad (7)$$

4. REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo. 5. ed. 2001. v. 1.

GUEDES, Aurilio da Silva. **Evolução do Cálculo de Áreas de Figuras Planas: de Arquimedes a Newton**. 2013. 77 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

MELCHIORS, Angeline; SOARES, Maricélia. **HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**. UNIASSELVI - Centro Universitário Leonardo da Vinci, Indaial - SC. Maiêutica - Curso de Matemática, p. 67-79.

MOHNSAM, Julio Cesar. **As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas**. 2014. 87 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2014.

MONTEIRO, Ivan Alves. **O Desenvolvimento Histórico do Ensino da Geometria no Brasil**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto.

PIASESKI, Claudete Maria. **A Geometria no Ensino Fundamental**. 2010. 36 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI – Campos de Erechim, Erechim, 2010.

SANTOS, Ednaldo Sena. **Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana Plana**. 2013. 78 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2013.