

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

# Trigonometria na Antiguidade

Curso: Bacharelado em Física

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I - MAT0111

Professor Doutor: Oscar João Abdounur

Aluno: João Pedro Almeida de Oliveira

Nº USP: 11877253

Data: 15/07/2020

## **Sumário**

### **1. Introdução**

#### **1.1. Babilônia**

#### **1.2. Egito**

#### **1.3. China**

#### **1.4. Grécia**

#### **1.5. Índia**

### **2. Matemáticos**

#### **2.1. Pitágoras de Samos**

#### **2.2. Euclides de Alexandria**

#### **2.3. Aristarco de Samos**

#### **2.4. Eratóstenes de Cirene**

#### **2.5. Hiparco de Niceia**

#### **2.6. Cláudio Ptolomeu**

### **3. A trigonometria e o cálculo**

### **4. E se houvesse o cálculo na antiguidade?**

### **5. Referências bibliográficas**

## 1. Introdução

A palavra trigonometria surgiu milênios de anos após o nascimento da área da matemática homônima, com o estudioso alemão Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613). Seu significado pode ser extraído a partir de três radicais gregos: tri (= três), gonos (= ângulo), que resulta em “triângulo”, e metro (= medida); o que mostra que trigonometria quer dizer medida dos lados e ângulos de um triângulo.

Sua origem exata é incerta, o que se sabe é que sua geração embrionária foram os babilônios e egípcios. Ela despontou especialmente como uma ferramenta matemática de grande suporte à astronomia, no entanto também é importante citar que houve outras motivações, como a navegação, agrimensura e construção.

Para a astronomia, ela teve grande relevância no método da triangulação, que consiste em fixar dois pontos, A e B, e um terceiro, C, referente a um corpo celeste distante, como uma estrela ou a Lua. Daí é traçado um segmento DE, paralelo a AC, por exemplo, e são utilizadas as relações métricas entre triângulos semelhantes.

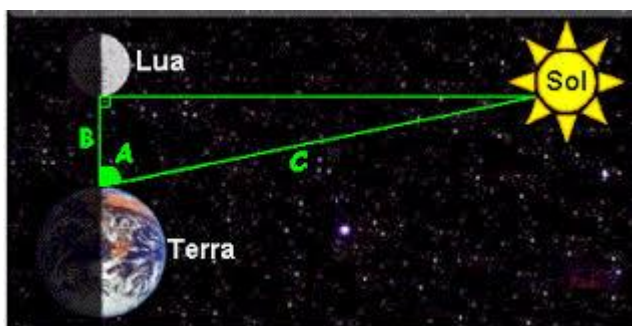


Figura 1. Terra, Lua e Sol: esquematização do método da triangulação.

No caso da navegação, um dos principais problemas era determinar a posição de um viajante em alto-mar. Para isso, desenvolveu-se o seguinte método: um viajante, partindo de Alexandria, famosa cidade no Egito, levaria consigo um relógio acertado com a hora de lá e, mais tarde, quando o sol estivesse exatamente sobre sua cabeça (meio-dia), calcularia o valor absoluto da diferença entre a hora local e a de Alexandria, multiplicando esse valor por  $15^\circ$  (já era conhecida a divisão da Terra em 24 fusos horários com  $15^\circ$  de distância entre um e outro). Desse modo, determinaria a longitude local em relação a Alexandria e, conhecendo a longitude desta, saberia a longitude geral.

Em relação à agrimensura e à construção, a trigonometria esteve muito presente ao medir terrenos e edificar prédios. Um instrumento muito utilizado foi o astrolábio, que, dentre suas diversas funções, era usado para calcular ângulos, medir a altura de uma montanha ou a profundidade de um poço, o que mostra sua importância para a época.



Figura 2. Astrolábio.

Apesar de suas inúmeras funções, pela própria configuração do instrumento, é possível afirmar que sua origem tem a ver com a astronomia. Isso porque a visão frontal dele representa a abóboda celeste em movimento e a etimologia de seu nome recai em astro (= estrela) e lip (= aquele que procura), ou seja, “buscador de estrelas”.

## 1.1. Babilônia

A Babilônia é o berço da trigonometria devido às várias aplicações astronômicas. Por meio dela, eles determinavam épocas para plantio, calendário, entre outros. Também foram os babilônios que dividiram a circunferência em 360 partes, talvez pela proximidade com a quantidade de dias do ano e por ser um múltiplo de 60, a conhecida base sexagesimal criada por eles.

Entre as muitas conquistas desse povo, destaca-se a escrita cuneiforme: modo de fazer registros escritos que consiste em moldar uma placa maleável de argila, alisar suas faces com um estilete de bambu, imprimir caracteres nela com uma cunha (espécie de lápis de madeira, mas com uma extremidade triangular, e não em forma de ponto) e, por fim, pôr ao sol ou cozinhar para endurecer. A partir dessa escrita, pôde ser concebida a tabela Plimpton 322, datada de aproximadamente 1800 a.C. Ela foi um importante material científico que continha uma lista de secantes, usadas na docência e na construção civil.



Figura 3. Tabela Plimpton 322.

## 1.2. Egito

O registro mais antigo de uso da trigonometria no Egito está centralizado no Papiro Rhind (ou Ahmes). Esse documento, datado de 1650 a.C., contém a solução de 85 problemas matemáticos copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo, entre os quais alguns citam a “seqt” de um ângulo, uma ideia que surgiu quando, na construção de pirâmides, foi necessário manter constante a inclinação das faces, a partir da razão entre afastamento horizontal e elevação vertical. O conceito de “seqt” é equivalente à cotangente.



Figura 4. Papiro Rhind.

## 1.3. China

Conta-se que desde dois milênios a.C. a trigonometria já era conhecida em território asiático, e há evidências de que em 1110 a.C., aproximadamente, os triângulos retângulos eram usados para medir distâncias. Porém, infelizmente, não se tem registro sobre como eram feitas as medições ou qual eram as unidades de medida utilizadas.

## 1.4. Grécia

Muitos dos importantes matemáticos que contribuíram significativamente para o desenvolvimento da trigonometria são gregos, e, como se não bastasse, também foram eles que deram ao relógio de sol trazido pelos babilônios o nome de gnômon. Esse relógio é um bastão fixado verticalmente no chão por meio do qual é possível observar a projeção das sombras produzidas pela luz solar. Essas sombras são compridas pela manhã e à tarde, enquanto que ao meio-dia se reduzem. A partir daí, os povos estabeleceram tabelas que forneciam o comprimento das sombras em um intervalo convencional e em relação à hora do dia. Além disso, especula-se que as tabelas de sombras sejam os mais antigos ancestrais da função cotangente.

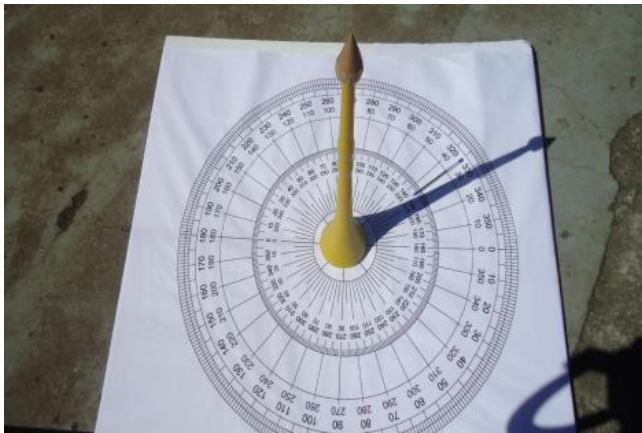


Figura 5. Gnômon. Fonte: Forma e Movimentos da Terra, Sandra dos Anjos, IAG-USP.

## 1.5. Índia

A tábua de senos mais antiga foi descoberta na Índia, onde provavelmente elas se originaram. Infelizmente, seus criadores são desconhecidos, mas se sabe que o conhecimento produzido por eles foi fruto das matemáticas babilônia e grega, transmitidas em circunstância do crescente contato comercial. O Surya Siddhanta, cujo significado é “Sistemas de Astronomia”, era um conjunto de textos matemáticos e regras enigmáticas de Astronomia, porém essa obra mais afirmava do que provava os conceitos apresentados. É datada do século IV ou V d.C., e a versão remanescente passou por tantas revisões que é difícil dizer quais partes são originais.

## 2. Matemáticos

A seguir, serão descritos alguns dos importantes matemáticos responsáveis pelo desenvolvimento da trigonometria.

### 2.1. Pitágoras de Samos (570-496 a.C.)

Filósofo, matemático, astrônomo e músico grego pré-socrático, ele foi um matemático de grande destaque, sendo responsável pela demonstração do teorema de Pitágoras, que, apesar de ter recebido seu nome, já era conhecido pelos babilônios. O enunciado dele diz que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

## **2.2. Euclides de Alexandria (300 a.C.)**

Professor, matemático e escritor, Euclides é conhecido como o “pai da geometria”. A sua obra *Os Elementos* basicamente fala de geometria, mas vale ressaltar que nas Proposições II.12 e II.13 é mostrado o equivalente à lei do cosseno para ângulos obtusos e agudos, respectivamente, porém de maneira geométrica.

## **2.3. Aristarco de Samos (310-230 a.C.)**

Aristarco foi um dos primeiros estudiosos a propor o sistema heliocêntrico (no qual o Sol, e não a Terra, é o centro do Sistema Solar). Ele se destaca por ter tentado calcular, plausivelmente, a distância entre a Terra e a Lua. Ainda que não tenha obtido o valor correto, em razão de não haver instrumentos de medida adequados na época, seu raciocínio foi excelente. Para isso, ele considerou a sombra da Terra que havia sido projetada na Lua por causa de um eclipse lunar. Daí, conhecendo o diâmetro da Terra e estimando o raio da sombra em relação ao raio da Lua, obteve o diâmetro angular aparente da Lua. No fim, concluiu que a distância Terra-Lua era 20 vezes menor que a distância Terra-Sol, porém hoje se sabe que o número correto é 400.

## **2.4. Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.)**

Eratóstenes foi um matemático insólito visto seu cálculo da circunferência da Terra. Para a época e até mesmo hoje, sua ideia não deixa de ser surpreendente. Resumindo, ele considera a incidência dos raios solares em dois locais distintos no mesmo momento: em um é formada uma sombra, mas no outro não. Com isso, sabendo a distância entre os locais e o ângulo produzido pela sombra em um deles, faz uma regra de três envolvendo uma fatia da circunferência da Terra (a correspondente à distância entre os lugares) e consegue determinar com um erro bem pequeno a circunferência do planeta. O valor a que chegou foi menos de 2% diferente do real, que é de 40 075 Km.

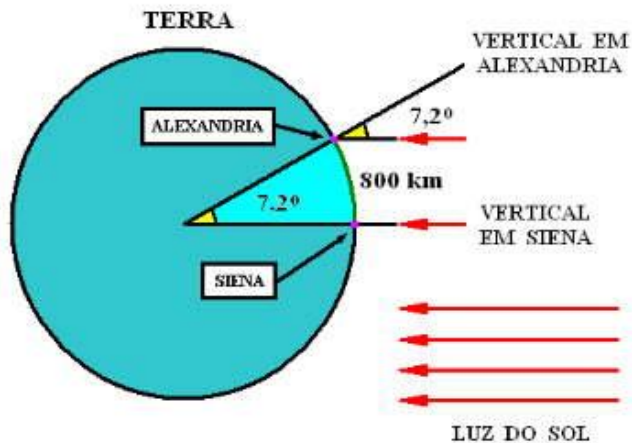


Figura 6. Esquemática do método de Eratóstenes.

## 2.5. Hiparco de Niceia (180-125 a.C.)

É considerado o fundador da astronomia científica, uma vez que em um catálogo com 850 estrelas, determinou as coordenadas celestes de cada uma e dividiu-as em seis magnitudes, de acordo com a luminosidade. Mas, apesar disso, rejeitou o modelo heliocêntrico proposto por Aristarco. Além disso, credita-se a ele o título de “pai da trigonometria”, porque elaborou uma coleção em doze livros na qual trata da construção de uma importante tabela de cordas.

$$A\hat{O}B = x \quad OB = r \quad \text{sen} \frac{x}{2} = \frac{AB}{2r}$$

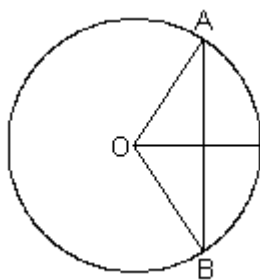


Figura 7. Circunferência de centro O e corda AB.

## 2.6. Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C.)

Astrônomo, geógrafo e matemático, Ptolomeu é conhecido por ter escrito a maior obra de trigonometria da antiguidade, *A Syntaxis Matematica*, ou *Almagesto*. Nessa gigantesca obra de 13 livros, ele também trata de cordas numa circunferência e de categorizar estrelas, assim como Hiparco. Nessa coleção, encontra-se o teorema de Ptolomeu, que possuiu grande importância para o cálculo de cordas. O enunciado diz: “Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais”.



$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

A partir daí, ele obteve o que hoje são as fórmulas para seno e cosseno da soma e da diferença.

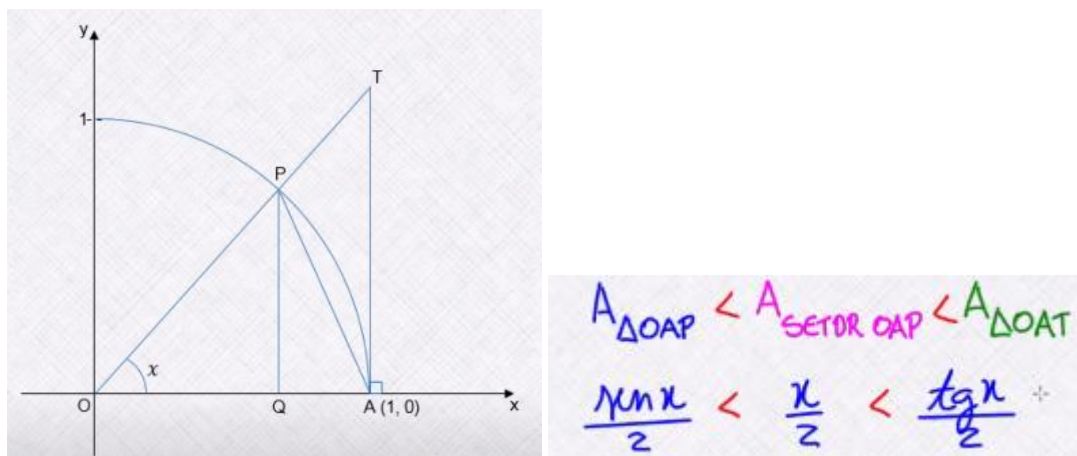
### 3. A trigonometria e o cálculo

Antes do surgimento do cálculo, a trigonometria evoluiu muito: emancipou-se da astronomia, tornando-se uma área individual da matemática, formalizou-se, recebendo as nomenclaturas e padrões de representação que conhecemos hoje, como a letra grega  $\pi$  (pi), o uso do termo “raio” para indicar a distância do centro de uma circunferência até a extremidade, entre outros.

Nesse sentido, devido à amplitude dessa extensa área matemática, hoje há diversas aplicações ao cálculo. Citar-se-á uma delas: o limite fundamental trigonométrico, muito aplicado no cálculo diferencial e integral. Ele é dado por

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

A demonstração: considere a seção de círculo OAP e os triângulos OAP e OAT.



Figuras 8 e 9. Construção geométrica para a prova da relação e inequações relativas à demonstração, respectivamente. Fonte: videoaula do professor Ferreto.

As desigualdades podem ser percebidas geometricamente.

A área do triângulo OAP é dada por  $(\text{absen } x)/2$ , sendo a e b dois dos lados que representam os raios da seção de círculo.

A área do setor circular: se  $\pi r^2$  (área do círculo) está para  $2\pi$ , então y (área do setor) está para x.

A área do triângulo OAT: base x altura x  $\frac{1}{2}$ .

Então, multiplicando as desigualdades por  $2/\sin x$ , obtém-se  $1 < x/\sin x < 1/\cos x$ . Agora, invertendo e mudando o sentido do sinal:  $1 > \sin x/x > \cos x$ .

Continuando, por meio do teorema do confronto, se os limites de 1 e de  $\cos x$  forem iguais a 1, então o de  $\sin x/x$  também o será.

No caso do 1, o limite de uma função constante é o próprio valor dela, então o limite de 1, quando  $x$  tende a 0, é igual a 1.

E o limite de  $\cos x$ , quando  $x$  tende 0, é 1, porque  $\cos 0$  é 1. Assim, a relação do limite fundamental trigonométrico foi provada.

#### **4. E se houvesse o cálculo na antiguidade?**

Essa é uma questão que exige bastante reflexão e também imaginação, mas, ainda assim, não pode descartar uma boa análise crítica do contexto social que envolve os períodos retratados.

Bom, é preciso considerar, inicialmente, que na antiguidade a liberdade de expressão era menor, a igreja tinha mais poder, em certo ponto sendo superior ao próprio estado, a ideia de sociedade vivia sob a ação de governos autoritários, entre outras infelicidades. Há muitos exemplos que mostram a falta de avanço na ciência não só na antiguidade, como também em períodos mais recentes. Ao longo da evolução da trigonometria, pôde-se perceber que são poucos e distantes cronologicamente os autores que de fato acrescentaram à área, o que revela falta de incentivo do poder público em educação. Mas, para a época, isso é evidente já que apenas as classes sociais mais altas aprendiam a ler e a escrever. Esse fato é intrigante pois, com menos pessoas em ação, certamente haveria menos ideias, logo uma evolução mais lenta.

De outro modo, um fato perturbador é o da evolução da ideia de átomo. Aquele átomo único, indivisível e maciço pensando por Demócrito no século V a.C. é o mesmo retornado por Dalton mais de 2 mil anos depois! Tamanha involução em tanto tempo infelizmente apenas corrobora a estagnação por que passou a sociedade, da antiguidade à idade das trevas.

Um outro exemplo ocorre com Galileu tendo que mentir sobre o resultado de seus estudos que comprovaram o modelo heliocêntrico, por causa do conservadorismo da Igreja Católica.

De qualquer forma, não é possível saber como realmente seria se já houvesse o cálculo desde a antiguidade, mas acredito que não estaríamos muito distantes de onde estamos hoje na ciência. Estaríamos mais longe, mas provavelmente não muito devido a todos esses impasses.

## 5. Referências bibliográficas

- <https://zap.aeiou.pt/afinal-os-babilonios-nao-gregos-os-primeiros-estudar-trigonometria-171538>
- <http://www.matematica.br/historia/trigonometria.html>
- <https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides>
- <https://brasilecola.uol.com.br/filosofia/pitagoras-1.htm>.
- <https://www.somatematica.com.br/biograf/erat.php>
- <https://educacao.uol.com.br/biografias/ptolomeu.jhtm>
- [http://www.astro.iag.usp.br/~aga210/pdf\\_2016b/Rot3\\_2016.pdf](http://www.astro.iag.usp.br/~aga210/pdf_2016b/Rot3_2016.pdf)
- [http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia\\_trigonometria.htm](http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm)
- <https://sites.google.com/site/trigonometriauniversitaria2017/>
- <https://www.youtube.com/watch?v=qurAykEsxio>
- <https://www.infoescola.com/astronomia/astrolabio/>
- <https://www.coladaweb.com/matematica/trigonometria>
- Boyer, Carl B., História da Matemática, Edgar Bluncher Ltda, São Paulo, 1996.
- Eves, Howard, Introdução à História da Matemática, Ed. Unicamp, Campinas, 1997.
- Leite, Lindevânia de Almeida. Breve história da Trigonometria – João Pessoa, PB, 2016.