UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA - IFUSP
PROFESSOR OSCAR JOÃO ABDOUNUR
MAT0111 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

GEOMETRIA NO EGITO

Felipe Reis Cerqueira Dantas Nº USP: 11321447

São Paulo, 2020

1. Introdução:

Este trabalho tem como objetivo apresentar a matemática desenvolvida no Egito, explicitando seu sistema de numeração; verificando seus métodos utilizados para realizar as operações básicas conhecidas; e verificar o legado dos papiros egípcios, estes contendo diversos detalhes sobre a matemática desenvolvida ali. Além disso, há como objetivo uma reflexão quanto a contribuição do conhecimento egípcio para o Cálculo.

2. Contexto Histórico:

A civilização egípcia surgiu e se desenvolveu às margens férteis do Rio Nilo há, aproximadamente, 5 mil anos. Devido o sucesso dos egípcios, esta civilização crescia de forma acelerada, fazendo com que fosse necessário desenvolver diversos mecanismos para atender a sociedade: a agricultura para sustentar a população; a astronomia para conseguir prever eventos naturais (como a mudança das estações do ano); e a matemática, seja com a álgebra ou com a geometria, tanto para questões mundanas (como separação de alimentos e terras) quanto para questões religiosas.

3. Números e Operações:

O sistema utilizado pelos egípcios era um sistema de agrupamento simples com base 10, no qual os números eram representados por hieróglifos. Estes representavam as 6 primeiras potências de 10.

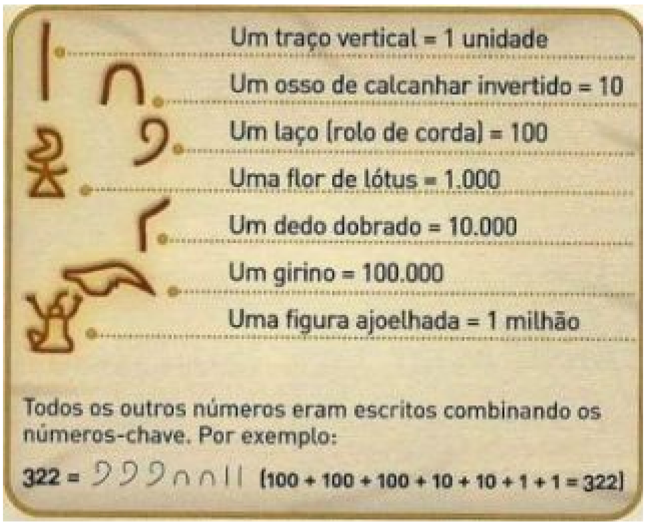


Figura 1: números egípcios

A principal operação utilizada pelos egípcios era a soma. A partir dela, derivaram outras duas propriedades: a multiplicação e a divisão - embora, mesmo para essas operações derivadas, se utilizava da soma para resolver os problemas.

Por exemplo, para calcular a multiplicação entre 12 e 27, a multiplicação é feita duplicando 12 até que a soma das duplicações, à esquerda, exceda 27:

'1	12
'2	24
4	48
'8	96
'16	192

Como pode-se ver, foram escolhidos números, na coluna da esquerda que, se somados, resultará em 27:

$$1 + 2 + 8 + 16 = 27$$

Assim, na coluna da esquerda, tomamos os valores correspondentes a cada duplicação e os somamos:

$$12 + 24 + 96 + 192 = 324$$

Como podemos ver, corresponde corretamente ao valor da multiplicação $12 \times 27 = 324$.

Para a divisão, utiliza-se um processo semelhante ao da multiplicação. Por exemplo, tomamos a divisão entre 184 e 8:

$$\begin{array}{cc} 1 & 8' \\ 2 & 16' \\ 4 & 32' \\ 8 & 64 \\ 16 & 128' \end{array}$$

Duplicamos o divisor 8 até que o número de duplicações exceda o dividendo, 184. Assim, para o dividendo na coluna da direita, temos que:

$$128 + 32 + 16 + 8 = 184$$

Por sua vez, na coluna da esquerda, tomamos os valores e os somamos. Assim, o resultado da divisão será:

$$1 + 2 + 4 + 16 = 23$$

Como podemos ver, corresponde corretamente ao valor da divisão $184 \div 8 = 23$.

Além disso, os egípcios foram um dos primeiros povos a imaginar e trabalhar com números que iam além dos conjuntos dos números Naturais: eles utilizavam frações na resolução de problemas. Isso foi um grande passo para a construção do conjunto dos números Reais, pilar do cálculo moderno. Porém, os egípcios eram capazes de usar apenas frações unitárias, isto é, $\frac{1}{n}$, $n \in N$ e com as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Para representar frações que não se encaixam nas características acima, era necessário descrevê-las pela soma de frações conhecidas. Por exemplo, o número $\frac{2}{15}$ deveria ser escrito de tal forma que: $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$. Para frações, assim como os números inteiros, eram representados por meio de hieróglifos.

Para representar as frações, era utilizado um hieróglifo semelhante a uma boca conforme a figura:

As frações eram escritas com este hieróglifo, que funcionava como o numerador e o traço da fração ($\frac{1}{}$). Assim, as frações unitárias poderiam ser escritas conforme a figura:

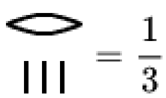
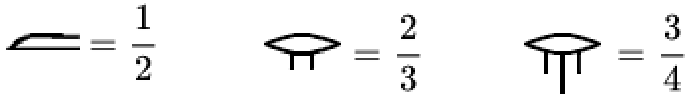


Figura 2: fração $\frac{1}{3}$

Além disso, havia hieróglifos específicos para algumas frações não unitárias e para o $\frac{1}{2}$ como na figura:



Os egípcios também utilizavam hieróglifos para simbolizar a operação da soma, conforme na figura:


Figura 3: operador da soma.

4. A Matemática no Egito:

Devido o contexto em que se encontravam, o desenvolvimento matemático dos egípcios visava quase que integralmente a resolver problemas encontrados no cotidiano: cálculo de volume de grãos colhidos, importante para o comércio; cálculo de volume do tronco de uma pirâmide assim como a inclinação de suas faces; e também o cálculo de áreas de alguns polígonos para a divisão do território. Porém, eles dominavam algumas operações ligeiramente avançadas, como o cálculo de progressões, equações do 1º e foram também uma das primeiras civilizações a definirem o número □.

No decorrer dos séculos XIX e XX, arqueólogos encontraram diversos papiros contendo informações e descrevendo diversos problemas e suas soluções. Os dois mais conhecidos são o Papiro de Moscou e o Papiro de Rhind e, também há outros papiros secundários, sendo o Papiro Matemático do Cairo o que mais se destaca..

Papiro de Moscou:

Sendo considerado o segundo papiro mais importante a ser encontrado, possui ao todo 25 problemas, tendo o problema 14 um maior destaque, pois ele retrata o cálculo do volume de um tronco de uma pirâmide de base quadrada: Na figura, segue o problema 14 do papiro:

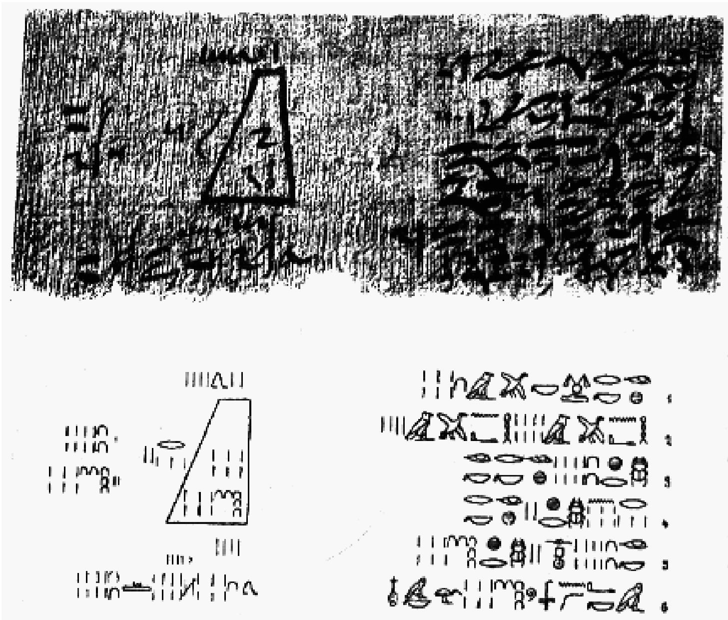


Figura 4: Papiro de Moscou

Com a imagem acima, temos sua citação adaptada através do livro Introdução à história da matemática, de Howard Eves:

"Se lhe for dito: Um tronco de pirâmide de altura vertical 6 por 4 na base e por 2 no topo. Você deve quadrar esse 4, resultando 16. Você deve dobrar 4, resultando 8. Você deve quadrar 2, resultando 4. Você deve somar o 16, o 8 e o 4, resultando 28. Você deve tomar o dobro de 28, resultando 56. Veja, é 56. Você o encontrará corretamente."

$$V \square = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A + \sqrt{A + A'} + A')$$

Papiro de Rhind:

Sendo considerado o papiro mais importante a ser encontrado, possui a solução detalhada de 85 problemas, estes envolvendo aritmética, frações, cálculo de área, volume, progressões, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. O papiro é separado em três livros: Livro I, Livro II e Livro III.

O Livro I consiste de uma tabela de referência de valores e uma coleção de 40 problemas, estes envolvendo aritmética e álgebra, como expressões fracionárias simples e equações lineares. Destaque para o problema 32, que corresponde à expressão $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 2$, sendo necessário encontrar o valor de x e, também, para os problemas 39 e 40, que envolvia divisão de alimento e progressões aritméticas.

O livro II consiste em problemas relacionados a geometria, sendo muitas vezes referidos como problemas envolvendo mensuração. Nos primeiros 5 problemas - 41 à 46 - era mostrado como se calcular o volume de um silo cilíndrico ou de base retangular. No problema 41, especialmente, tem-se o cálculo do volume de um silo cilíndrico de diâmetro *d* e altura *h*, assim, o volume seria dado por:

$$V = [(1 - \frac{1}{9}) \cdot d]^2 \cdot h$$

Os 7 problemas seguintes, 48-55, mostra-se o cálculo da área de círculos, triangulos e quadriláteros. O problema 48, onde se calcula a área de um círculo, é muito comentado, pois nele houve uma aproximação muito precisa do número □: é comparado a área de um círculo com um octógono e seu quadrado circunscrito. Cada lado do polígono é tri-seccionado e os triângulos excedentes são removidos, resultando em uma figura octogonal que se aproxima a de um círculo.

Assim, a área da figura octogonal é calculada por $9^2 - 4 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3) = 63$, que pode ser aproximado a 64, que teremos $64 = 8^2$. Assim, chega-se a aproximação $\square \cdot (\frac{9}{2})^2 \approx 8^2 \rightarrow \frac{(8^2 \cdot 2^2}{9^2} = \square \rightarrow \square \simeq 3.1604$, possuindo um erro de apenas 0.0189.

Neste capítulo também havia problemas relacionados a pirâmides e a inclinação de suas faces, sendo os últimos 5 problemas. Dentro destes, temos um problema com as seked (unidade de medida dos egípcios) que é apresentado pelo livro Trigonometric Delights, de Eli Maor da seguinte forma:

“Se uma pirâmide tem 250 cúbitos de altura e sua base tem 360 cúbitos de lado (do quadrado), qual é sua área em sekeds?"

A solução via a relação entre metade do lado da base da pirâmide e sua altura. Ou seja, a quantidade encontrada era, indiretamente, a cotagente do ângulo da base da pirâmide e sua face lateral.

Por fim, no Livro III, com os demais problemas, continham problemas genéricos de álgebra, mais cálculos de volume para alimentos e trabalho com frações. Se destacam os problemas 79 que se trata de uma progressão geométrica de razão 7 e, também, os problemas 80 e 81, que calculam frações para o Olho de Hórus. Na figura abaixo, temos uma representação do Olho de Hórus, evidenciando suas frações:

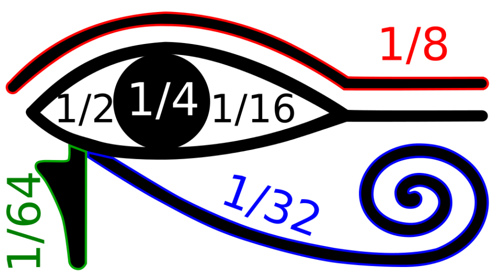


Figura 5: frações representadas pelo Olho de Hórus.

Papiro Matemático do Cairo:

O Papiro Matemático do Cairo, embora não faça parte entre os principais já encontrados, ele traz informações importantes. Esse Papiro possuia, ao todo, 40 problemas matemáticos Porém, 9 destes se destacam pois eles tratam direta e exclusivamente sobre o Teorema de Pitágoras. As escrituras mostram que, embora primitiva, os egípcios possuiam certo conhecimento sobre a ideia que, mais tarde, seria conhecida como Teorema de Pitágoras, pois os egípcios utilizavam há muito tempo o famoso “Triângulo Pitagórico” de lados 3, 4 e 5. Além disso, os egípcios já sabiam que, além do triângulo 3, 4 e 5, que os triângulos 5, 12 e 13 e 20, 21 e 29 eram todos retângulos.

5. Reflexão:

- Quais métodos desenvolvidos no Egito contribuíram para a formação do Cálculo?

Embora a matemática egípcia tenha se desenvolvido para a resolução de problemas encontrados no cotidiano, muitas de suas, digamos, “descobertas”, foram de grande importância para o desenvolvimento do cálculo, que ocorreria muitos séculos depois.

Verificando todo o conhecimento dos egípcios conforme mostrado, é possível ver que eles possuíam um bom domínio em vários ramos da matemática, como a álgebra e geometria. Além disso, podemos dizer que foram pioneiros também em certos ramos, como em geometria e trigonometria (embora este último não tenha sido de forma direta e intencional, conforme descrito no trecho do Papiro de Rhind).

Pensando agora no cálculo diferencial e integral, como já estudamos nas aulas, sabemos que há três operações-base: o conceito e aplicação de limite, a derivação de funções e a integração de diferenciais, sendo tudo isso sustentado pelo conjunto dos números reais, pilar da matemática como a conhecemos.

Nós sabemos que o conjunto dos reais é o conjunto numérico mais completo feito, englobando desde os naturais positivos, às dízimas não periódicas irracionais. Porém, durante a era pré-grega, onde a matemática era utilizada quase que exclusivamente para fins cotidianos, não havia uma consciência de números não naturais, sempre o intuitivo prevalecia: os números inteiros positivos. Porém, como mostrado, os egípcios conseguiram ir além do intuitivo, sendo uma das primeiras civilizações a trabalharem com frações. Ok, eles eram capazes de utilizar frações, mas qual a importância disso?

As frações utilizadas por eles, embora essas operando com apenas frações unitárias (com algumas exceções), contribuiu para despertar uma ideia para as civilizações posteriores, como para os gregos - estes que muitas vezes iam ao Egito para aprender as técnicas utilizadas, como o próprio Pitágoras e Tales de Mileto - que existia algo entre os números naturais. Essa ideia de uma fração entre inteiros positivos, posteriormente, seria útil para construir o conjunto dos números reais. Geraldo Ávila, em seu livro Introdução à

Análise Matemática, explicou como poderia ser feita essa construção a partir dos números racionais:

"Os números reais podem ser construídos como classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. A ideia é juntar em uma mesma classe todas as sequências que possuem o mesmo limite, ou seja, considerar que duas sequências de Cauchy são equivalentes se possuírem o mesmo limite. Assim, define-se um número real pelo limite que representa uma classe de equivalência."

Ou seja, podemos ver que a ideia de números racionais, utilizada pelos egípcios, contribui para construirmos o pilar da matemática, que é o conjunto dos reais.

Já no cálculo, mais propriamente dito no cálculo integral, temos que a sua função base é no cálculo de uma área sob uma curva e no volume de sólidos. Embora seja uma técnica deveras avançada, a definição de Integral é algo até que intuitivo. A definição, chamada de Soma de Riemann, consiste, a grosso modo, ao imaginar uma curva, inserir retângulos ou trapézios tal que a área sob a curva será equivalente à soma da área dos retângulos ou trapézios, conforme a figura:

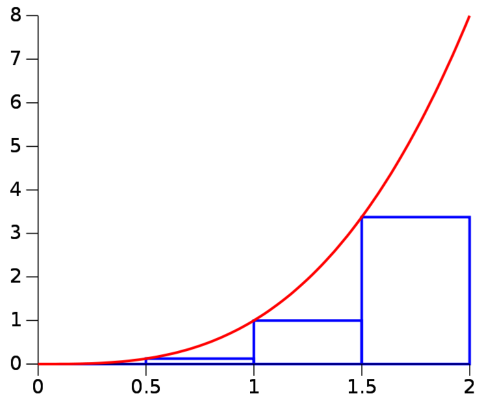


Figura 6: a soma de Riemann

Os egípcios, embora não fossem capazes de desenvolver tal ferramenta, foram capazes de desenvolver e utilizar a premissa da definição de integral: "*a área de um retângulo é o produto da base* · *altura*".

6. Conclusão:

Assim, podemos concluir que, por mais que os egípcios tenham desenvolvido sua matemática na época de maneira procedimental, é inegável a tamanha importância do papel do egípcios - além das demais civilizações antigas - no desenvolvimento da matemática, seja a partir da visão não tradicional ao aprenderem a trabalhar com frações, seja pelos conhecimentos geométricos registrados em papiros, pois permitiu que a matemática florescesse em outras civilizações, como a grega.

7. Referências Bibliográficas:

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4475052/mod_resource/content/1/Geometria%20no%20Egito.pdf

http://www.matematica.br/historia/egito.html

http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm

https://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind

https://conhecimentos-verdadeiros.webnode.com/products/o-calculo-diferencial-e-integral/#:~:text=O%20c%C3%A1lculo%20tem%20inicialmente%20tr%C3%AAs,e%20a%20integral%20de%20diferenciais.&text=Foram%20Leibniz%20e%20Newton%20que,em%20um%20m%C3%A9todo%20matem%C3%A1tico%20sistem%C3%A1tico.

Maor, Eli (1998). *Trigonometric Delights*.

Eves, Howard. Introdução à história da matemática

Ávila, Geraldo (1995). *Introdução à Análise Matemática*. Editora: Edgard Blücher