Angela Guião,

nº USP: 11224400

Cálculo de áreas

Arquimedes e o segmento de parábola

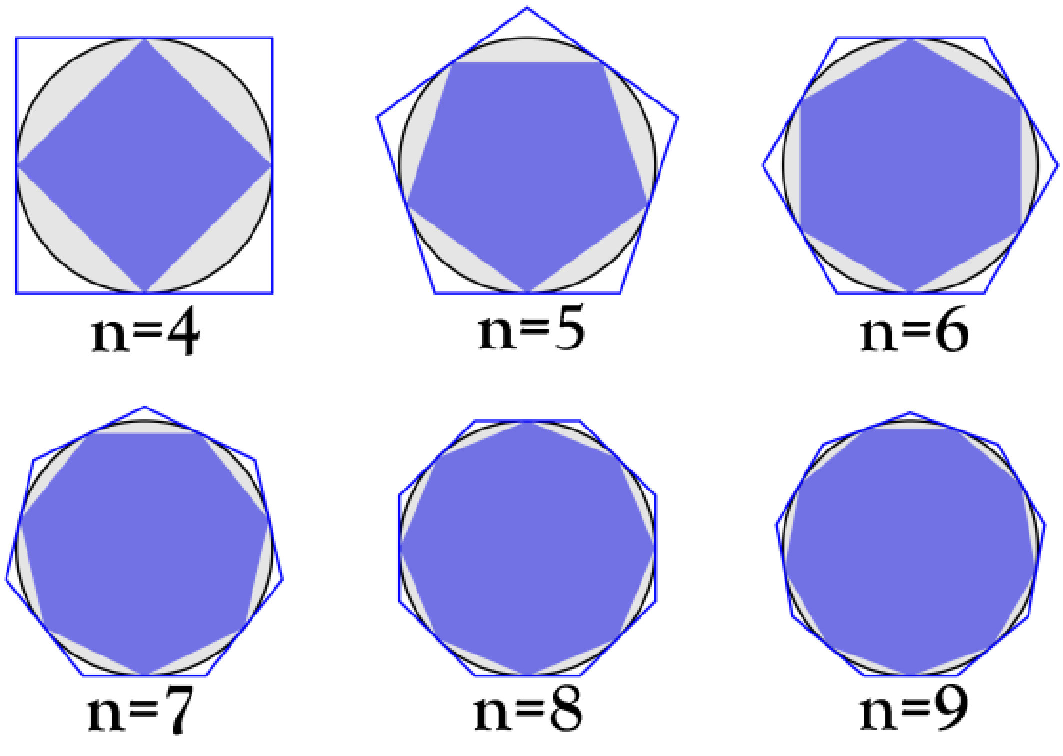
Introdução

Arquimedes foi um matemático grego que viveu no século 3 a.C. em Siracusa.

Foi um dos primeiros matemáticos a aplicar o princípio de Eudoxo (Método da Exaustão) ao cálculo de áreas.

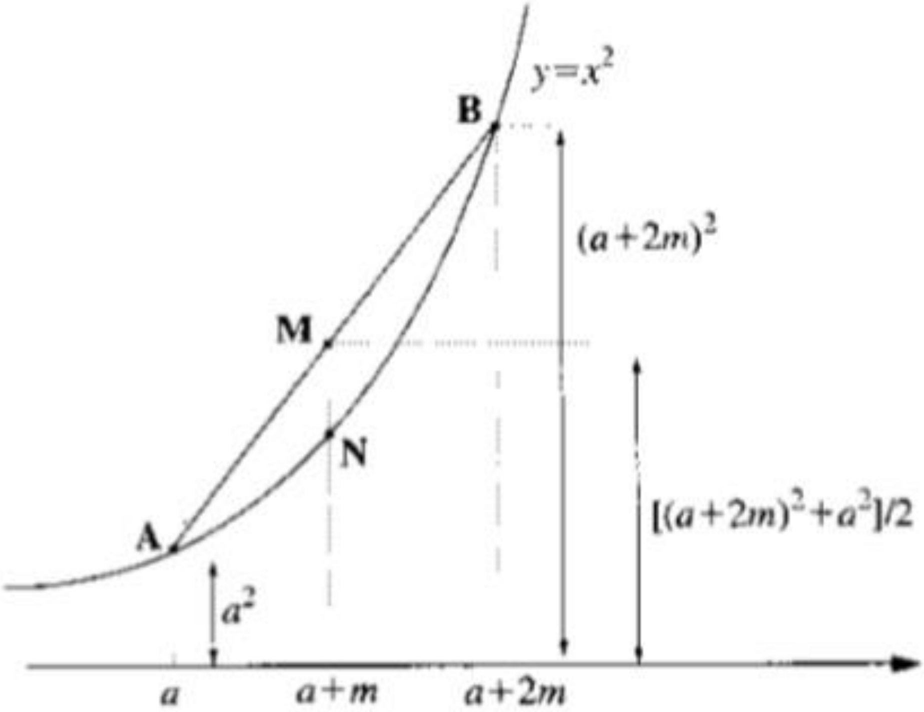
Uma de suas descobertas foi a fórmula para o cálculo da área de um segmento de parábola. Nesse trabalho vou mostrar o raciocínio que esse matemático usou para elaborar a fórmula do cálculo da área sob a parábola e como isso antecedeu o surgimento da integral.

O que é o método da exaustão?



Exaustão era um método utilizado para encontrar a área de uma figura através da inscrição em polígonos cujas somas das áreas convergiam para a área da figura onde estavam inscritos. Quanto maiores fossem as áreas dos polígonos inscritos, maior precisão teria a área da figura.
Calcular áreas por exaustão é uma ideia atribuída originalmente à Antífon (481-411 a.C.), mas não se sabe se ele realmente a entendeu. A teoria foi aplicada com sucesso para o cálculo das áreas dos círculos por Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.). Hipatia (372-415 d.C.) utilizou o método da exaustão com sucesso para calcular áreas de elipses, parábolas e hipérboles.

Cálculo da área sob um segmento de parábola



Considere o segmento de parábola limitado por y = x² e pela corda AB.

Como em um trapézio o segmento que liga os pontos médios dos lados não paralelos é a semissoma das bases, a ordenada de M será:

$$\frac{(a+2m)^2+a^2}{2}$$

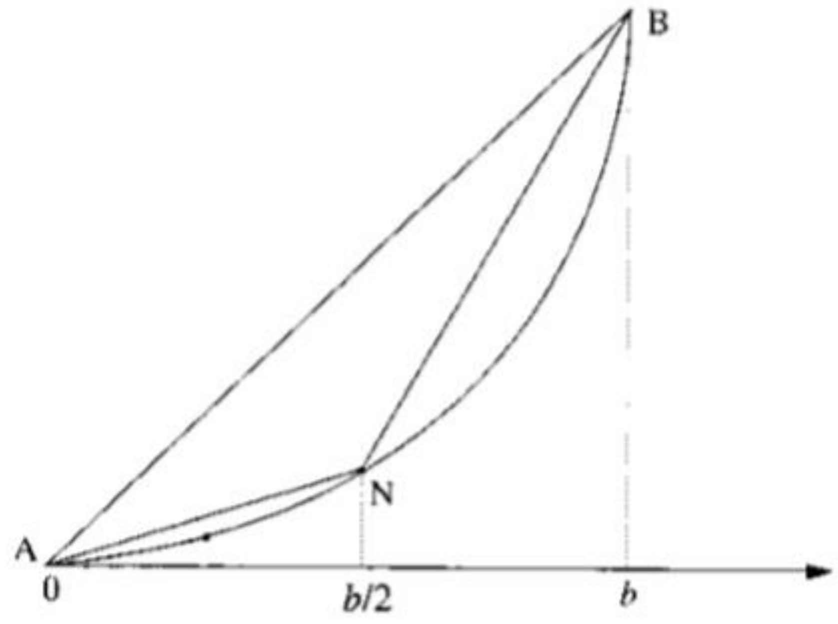
Pela figura, $\left|\frac{(a+2m)^2+a^2}{2}\right| - (a+m)^2 \Rightarrow MN = m^2$

As alturas dos triângulos AMN e BMN em relação a base MN é m para ambos. Então, a soma de suas respectivas áreas será:

$$área\ \Delta AMN + área\ \Delta BMN = \frac{m^2.\ m}{2} + \frac{m^2.\ m}{2} = m^3$$

Esse resultado corresponde a área do triângulo ANB.

Partindo para o cálculo do segmento parabólico e colocando A na origem :

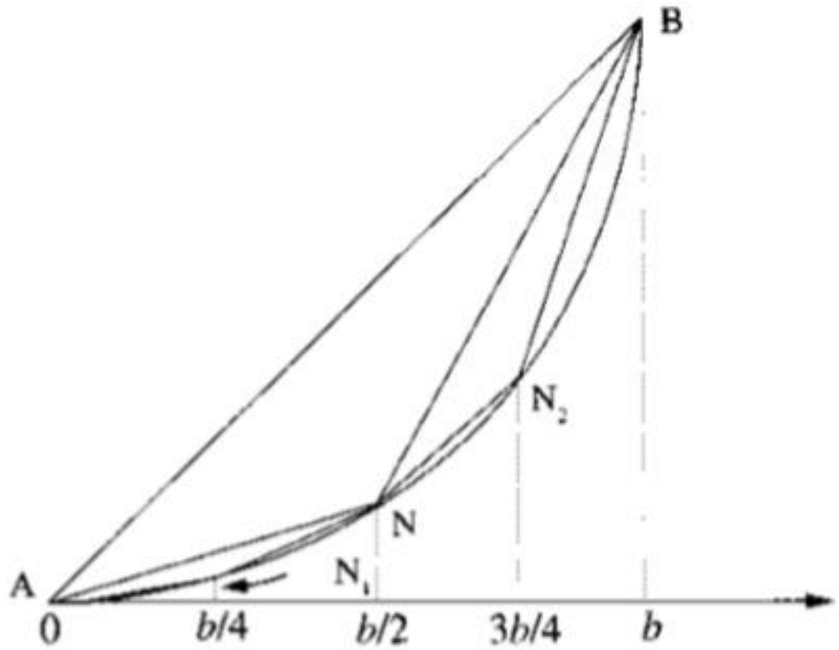


Nesse caso, $m = \frac{b}{2}$

Assim, a área de ANB que chamaremos de T, será: $T = \left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{b^3}{8}$

A área de ANB é a primeira aproximação para a área do segmento de parábola.

Melhorando a primeira aproximação, soma-se as áreas dos triângulos AN_1N com NN_2B.



$$Área\ AN_1N = Área\ NN_2B = \left(\frac{b}{4}\right)^3 = \frac{b^3}{64}$$

Segue-se que

$$Área\ AN_1N + Área\ NN_2B = \frac{b^3}{32} = T/4$$

Assim, nossa segunda aproximação será: $T + \frac{T}{4} = T\left(1 + \frac{1}{4}\right)$

Para uma terceira aproximação, o intervalo [0, b] será dividido em 8 partes iguais. Somando- se as áreas dos novos triângulos, a soma das novas áreas será $b^3/128$, que corresponde a ¼ da área anteriormente acrescentada.

Assim $T + T/4 + T/4^2 = T(1 + ¼ + ¼^2)$

Seguindo esse raciocínio, a área será a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de primeiro termo 1 e razão ¼, resultando em 4/3.

Área do segmento = $T(1 + ¼ + ¼^2 + \ldots) = \frac{4T}{3}$

Mas o conceito de limites e infinito não era conhecido na época, o que tornou necessário que ele usasse seu **Método de descoberta**: ele verificou por meio de uma balança que o peso do segmento de parábola era exatamente 4/3 do triângulo ANB. Em seguida, admitiu que o valor da área era 4T/3, provando sua veracidade por uma dupla redução ao absurdo:

Temos:

$$1 = \frac{4}{4} = ¾ + ¼ = ¾ + \frac{4}{4^2} = ¾ + ¾^2 + ¼^2 = \cdots$$

Continuando o raciocínio acima, obtém-se:

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{3}{4^n} + \frac{1}{4^n}$$

Somando 3 aos dois membros, em seguida dividindo por 3 e multiplicando por T:

$$\frac{4}{3}T = T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \frac{T}{3 \cdot 4^n}$$

Para provar que a área do segmento parabólico ANB é S = 4T/3 será preciso provar que essa área:

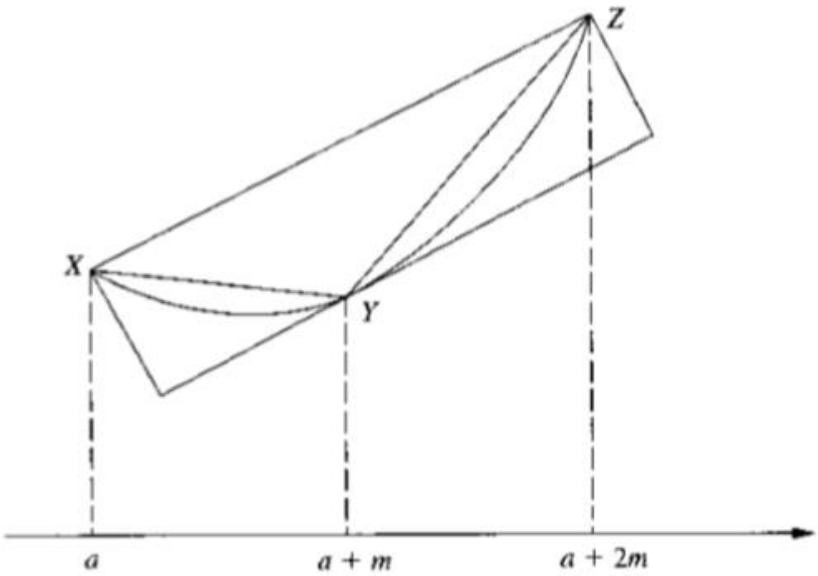
1. não pode ser menor que 4T/3;

2. não pode ser maior que 4T/3.

Para provar 1, Arquimedes utilizou o postulado, cujo enunciado moderno é: “D*ados os números reais x e y, com x > 0, existe um natural m tal que mx > y.”* (**propriedade de Arquimedes**)

Para provar 2, ele utilizou as seguintes propriedades:

I. *“Dadas duas grandezas distintas, se da maior subtrai-se mais que sua metade, do restante mais que sua metade, e assim por diante, acabará restando uma grandeza menor que a menor das grandezas dadas”*
II. *“A reta tangente à parábola* $y = x^2$ *no ponto de abscissa* $a + m$ *é paralela à corda de extremidades* (a, a^2) *e* $(a + 2m, (a+ 2m)^2)$*.”*



Prova da primeira etapa:

Suponhamos por absurdo que $S < 4T/3$. Assim, $4T/3 – S > 0$. Pela propriedade de Arquimedes, existe um natural n tal que: $3 \cdot\ 4^n \left(\frac{4}{3}T - S\right) > T$

E, portanto : $\frac{4}{3}T - S > \frac{T}{3 \cdot 4^n}$, daí $\frac{4}{3}T - T\frac{T}{3 \cdot 4^n} > S$

Ou seja, $T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^n} > S$

O que é uma contradição, pois: $T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^n} < S$

Prova da segunda etapa:

Suponhamos agora que $S > 4T/3$. Das propriedades I e II, existe um natural n tal que:

$$S - \left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n}\right) < S - \frac{4}{3}T$$

E, portanto:

$$S - \left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n}\right) < S - \left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \frac{T}{3 \cdot 4^n}\right)$$

Segue que: $T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n} > T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \frac{T}{3 \cdot 4^n}$

O que é uma contradição.

Conclusão:

Se a área do segmento parabólico não pode ser maior e nem menor do que 4T/3, resulta que a área é exatamente 4T/3.

Em consequência disso, a área da região limitada pela parábola $y = x^2$, $0 \leq x \leq b$, pelo eixo x e pela reta $x = b$ é $b^3/3$.

Esse valor obtido, $b^3/3$, equivale ao que conhecemos hoje por $\int_0^b x^2 dx$. Com isso, o conceito fundamental de “área sob a curva” estava surgindo e, posteriormente, possibilitou o aumento do formalismo e a aplicação para outras funções.

Referências:

Site: Atitude Reflexiva, link: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/01/o-metodo-da-exaustao-e-o-surgimento-da-constante-pi-%CF%80/> acesso em 3/07/2020

Livro: Um curso de cálculo v.1, Hamilton Guidorizzi, 5ª edição, editora LTC – Livros Técnicos e Científicos editora S.A., capítulo 17, p. 491-496