

## Experimento 2 - Pêndulo Físico

### Introdução

Diferente do pêndulo simples, onde o braço de alongamento da força restauradora gravitacional ( $F_g$ ) é o comprimento  $l$  do fio / barbante, no pêndulo físico (ou pêndulo composto) o braço de alongamento é dado pela distância  $r$  do centro de massa  $G$  ao eixo de suspensão  $O$ .

Assim, nesse sistema há um sólido em rotação ao redor de um eixo fixo cujo momento de inércia  $I_c$  não depende mais do comprimento  $l$  e sim da forma do pêndulo físico, sendo ainda proporcional à massa  $m$ .

### Metodologia

#### Lista de Material

- Haste de suspensão
- Barra de metal com furos (pêndulo)
- Cronômetro ( $\pm 0,001$  s)
- Trena ( $\pm 0,1$  cm)
- Balança digital ( $\pm 0,1$  g)

#### Procedimento Experimental

Com os furos devidamente numerados e medidos os valores de  $d$  e  $r$ , deslocou-se a barra com um pequeno ângulo ( $\theta \approx 10^\circ$ ). Mediu-se o tempo necessário para o sistema realizar 10 oscilações, repetindo mais 3 vezes, uma vez por tempo para cada furo. Com os respectivos valores preencheu-se a tabela 1 para de foto inicial.

Objetivos do experimento: Compreender o funcionamento do pêndulo físico, entender sua relação com o pêndulo simples, determinar a aceleração da gravidade e o momento de inércia do corpo.

Equações utilizadas: (5)  $I_c = m \cdot R^2$

(6)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{g \cdot r}}$  (7)  $T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$

(8)  $r_1 + r_2 = T^2 g / 4\pi^2$  (9)  $r_1 \cdot r_2 = R^2$

Resultados:

Número do furo	d (cm)	r (cm)	t1 (s)	t2 (s)	t3 (s)	t4 (s)	t <sub>m</sub> (s)	T (s)
1	2,5	47,5	15,88	15,91	15,95	15,91	15,9	1,59
2	5	45	16,7	16,85	16,81	16,79	16,78	1,678
3	7,5	42,5	15,65	15,77	15,6	15,67	15,67	1,567
4	10	40	15,53	15,61	15,56	15,59	15,57	1,557
5	12,5	37,5	15,52	15,47	15,49	15,52	15,5	1,55
6	15	35	15,49	15,41	15,46	15,49	15,46	1,546
7	17,5	32,5	15,44	15,37	15,35	15,36	15,38	1,538
8	20	30	15,33	15,29	15,33	15,33	15,32	1,532
9	22,5	27,5	15,3	15,26	15,25	15,25	15,27	1,527
10	25	25	15,17	15,2	15,23	15,21	15,2	1,52
11	27,5	22,5	15,15	15,19	15,21	15,18	15,18	1,518
12	30	20	15,53	15,55	15,59	15,58	15,57	1,557
13	32,5	17,5	16,18	16,3	16,32	16,29	16,27	1,627
14	35	15	16,74	16,7	16,68	16,61	16,68	1,668
15	37,5	12,5	17,6	17,8	17,53	17,64	17,64	1,764
16	40	10	19,18	19,33	19,19	19,27	19,24	1,924
17	42,5	7,5	21	20,33	20,88	20,4	20,65	2,065
18	45	5	25,38	25,31	25,48	25,71	25,47	2,547
19	47,5	2,5	34,48	34,4	34,47	34,36	34,43	3,443
20	50	0						

## 1- Refina o raio de giro ( $R$ )

Analisando a tabela, percebe-se que existem alguns valores próximos de período  $T$ . Tomando dois fusos com  $T$  iguais, substituiu-se os mesmos na equação (6) para chegar a um valor de raio de giro ( $R$ ). Os fusos tomados foram os de números 4 e 12. (com  $T$  igual de  $1,557$  s) com raios  $r$  de  $0,4$  m e  $0,2$  m respectivamente.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{g \cdot r}}$$

$$\text{Fuso 4: } 1,557 = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + (0,40)^2}{9,8 \cdot 0,40}} \Rightarrow R^2 = 0,08071 \Rightarrow R = 0,2841 \text{ m}$$

$$\text{Fuso 12: } 1,557 = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + (0,20)^2}{9,8 \cdot 0,20}} \Rightarrow R^2 = 0,08032 \Rightarrow R = 0,2834 \text{ m}$$

Extraindo a média entre os dois valores extremamente próximos, achou-se que o raio de giro é  $R = 0,2834$  m.

2- Demonstrar que o  $T_{\min}$  é dado pela equação (7). Além disso, demonstrar as equações (8) e (9).

$$\text{(Equação 6)} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{g \cdot r}}$$

$$= 2\pi \left( \frac{R^2 + r^2}{g \cdot r} \right)^{1/2} \approx \frac{2}{2r} \left( 2\pi \left( \frac{R^2 + r^2}{g \cdot r} \right)^{1/2} \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{R^2 + r^2}{g \cdot r} \right)^{-1/2} \left( \frac{2r}{g \cdot r} - \frac{(R^2 + r^2) \cdot g}{g^2 \cdot r^2} \right)$$

$$= \pi \left( \frac{R^2 + r^2}{g \cdot r} \right)^{-1/2} \left( \frac{2r}{g \cdot r} - \frac{(R^2 + r^2) \cdot g}{g^2 \cdot r^2} \right) = 0$$

$$\frac{2r}{2r} - \left( \frac{R^2 + r^2}{g \cdot r^2} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{g} = \frac{R^2 + r^2}{r^2} \quad \text{ou} \quad 2r^2 = R^2 + r^2$$

$$r^2 = R^2$$

\*  $R = r$

\* Substituindo na equação 6

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + R^2}{2R}} = 2\pi \sqrt{\frac{R(R+R)}{2R}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} \quad (7)$$

→ Demonstração das equações (8) e (9)

Partindo da equação (6) chega-se em:

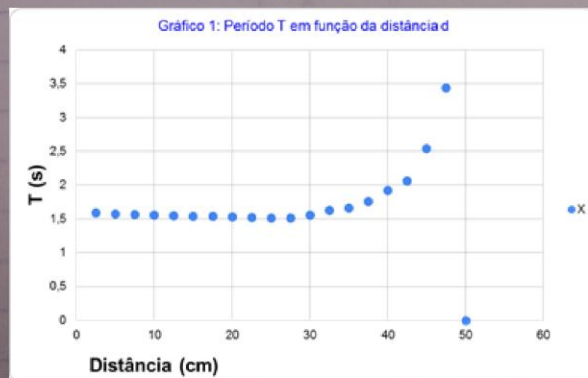
$$T^2 = 4\pi^2 \left( \frac{R^2 + r^2}{gr} \right) \Rightarrow T^2 \cdot gr = 4\pi^2 (R^2 + r^2)$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 r^2 - T^2 gr + 4\pi^2 R^2 = 0$$

$$S = -b/a = -(-T^2 g) / 4\pi^2 = r_1 + r_2 \quad (8)$$

$$P = c/a = (4\pi^2 R^2) / 4\pi^2 r^2 = R^2 / r^2 = r_1 \cdot r_2 \quad (9)$$

3-a) faça um gráfico de T em função de d:



b) Determine o período mínimo  $T_{\min}$  com o qual este pêndulo pode oscilar.

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{2 \cdot (0,2837)}{9,8}} = 1,51 \text{ s}$$

c) Determine a partir de um determinado período  $T$  os valores de  $r_1$  e  $r_2$ . A partir de  $r_1$  e  $r_2$  determine o raio de giro  $R$  equivalente e a aceleração da gravidade  $g$  através dos equações (7), (8), (9). Compare o valor de  $R$  e  $g$  obtidos nesta questão com o  $R$  da questão 1 e  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

$$4\pi^2 r^2 - (1,51)^2 \cdot (9,8) r + 4\pi^2 (0,2837)^2 = 0$$
$$4\pi^2 r^2 - 22,34 r + 3,177 = 0$$

$$S = -b/a = \frac{-(-22,34)}{4\pi^2} = 0,566 \neq r_1 + r_2$$

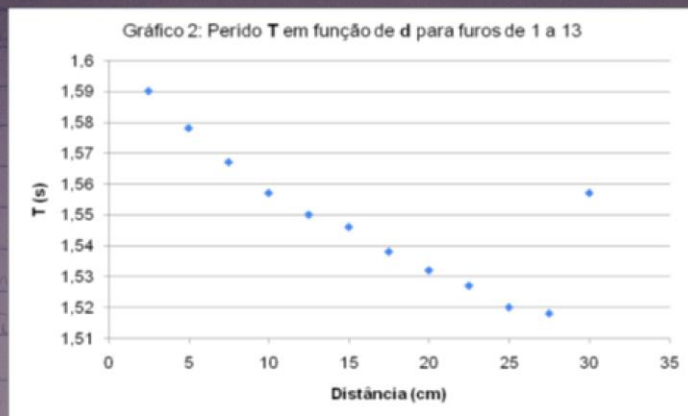
$$p = c/a = 3,177 / 4\pi^2 = 0,08047 \Rightarrow R^2 = 0,08047$$
$$R = 0,2836 \text{ m}$$

Comparando o valor de  $R = 0,2836$  com o resultado da soma, conclui-se que  $0,566$  é aproximadamente o dobro de  $R$ . Assim, dividindo  $0,566$  chega-se em  $r_1 = r_2 = 0,2830 \text{ m}$ .

Encontrando a aceleração da gravidade  $g$  através

$$(1,51)^2 = \frac{4\pi^2 (2 \cdot (0,2836))}{g} \Rightarrow g = 9,82 \text{ m/s}^2$$

tilibra



O raio de giro encontrado nesta questão foi de  $0,2836\text{ m}$ , enquanto que na questão 2 foi de  $0,2837$  (tirando a média entre os dois valores para  $r$ ). Considerando que ambos possuem 3 algarismos iguais, são valores iguais sendo arredondados. Estes valores próximos tornam o experimento preciso e com poucos erros sistemáticos presentes, o que pode ser justificado pelos diversos repetições realizadas juntamente para amenizar erros visuais. Como o deslocamento angular  $\theta$  foi mantido constante a um valor pequeno, os valores de tempo não tiveram grande divergência para cada furo.

Da mesma forma ocorreu para a aceleração da gravidade, onde foi obtido um valor de  $g = 9,82\text{ m/s}^2$ , com um desvio de  $0,20\%$  do valor teórico esperado, ou seja, um valor encontrado satisfatório.

d) Com a massa  $m$  da boba e o raio de giro equivalente  $R$  determinado a partir do gráfico, calcule o momento de inércia  $I_c$ , dada pela equação (5).

$$m = 0,421\text{ Kg}$$

$$I_c = M R^2$$

$$R = 0,2836$$

$$I_c = (0,421) \cdot (0,2836)^2$$

$$I_c = 0,03386\text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

e) Compare o valor do item d) com aquele esperado teoricamente para uma barra rígida sem furos.

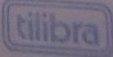
$$\text{Momento de inércia para barra sem furos: } \frac{ml^2}{12}$$

Pelos dados, o comprimento  $l = 1 \text{ m}$  e  $m = 0,421 \text{ kg}$

$$I_c = \frac{(0,421)(1)^2}{12} = 0,03508 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

A barra sem furos, por se tratar de uma barra homogênea, apresenta momento de inércia maior do que para barra com furos. Isso, levando em consideração os possíveis erros experimentais, ainda é justificável pelo embasamento teórico de que quanto maior for o momento de inércia maior deve ser a força aplicada para que ocorra rotação, ou seja, é mais difícil girar essa barra (neste caso, a massa foi a mesma e o momento de inércia da barra sem furos não depende do raio e sim do comprimento  $l$ ).

### Conclusão:

O objetivo do experimento foi alcançado e a análise dos dados obtidos colaborou para uma melhor compreensão do sistema de um pêndulo físico. Manipulando as derivadas equações, chegou-se a resultados satisfatórios que permitem avaliar o experimento de uma forma geral, como preciso e ausente de erros sistemáticos. Os valores encontrados de raio de giro, 

Momento de inércia e aceleração da gravidade foram muito próximos dos resultados esperados, ou seja, o experimento cumpriu com o seu objetivo.

1. Objetivo do experimento: determinar o momento de inércia de um corpo rígido.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Para determinar o momento de inércia de um corpo rígido, utilizamos o método do pêndulo físico. Este método consiste em suspender o corpo por um eixo horizontal e medir o período de oscilação para diferentes posições de suspensão. A partir das medições, podemos calcular o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de suspensão. O momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo é a soma dos produtos da massa de cada elemento do corpo pelo quadrado da distância desse elemento ao eixo.

Conclusão

Concluímos que o momento de inércia de um corpo rígido pode ser determinado experimentalmente utilizando o método do pêndulo físico. Os resultados obtidos foram muito próximos dos resultados esperados, o que confirma a validade do método utilizado.



Conexão:

$$\begin{aligned}\text{Item d)} \quad I_c &= m \cdot R^2 + m \cdot r^2 \\ I_c &= (0,421) \cdot (0,2836)^2 + (0,421) \cdot (0,475)^2 \\ I_c &= 0,03386 + 0,09499 \\ I_c &= 0,129 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

$r$  = raio no furo 1.

O erro no item (d) foi não ter utilizado o teorema dos eixos paralelos.

Item e) O momento de inércia teórico para uma barra presa na extremidade é dada por:

$$I = \frac{m \cdot L^2}{3} = \frac{(0,421) \cdot (1)^2}{3} \Rightarrow I = 0,1403 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$