Introdução

Um corpo rígido, suspenso por um ponto que não seja o seu centro de massa, oscila quando for deslocado da posição de equilíbrio. Este sistema é um pêndulo físico.

Em todos os pêndulos reais as massas pendulares não serão simples partículas, mas possuirão dimensões que nem sempre serão desprezíveis, os fios terão massa e muitas vezes serão substituídas por hastes rígidas de massas não desprezíveis. Na verdade, qualquer corpo que seja posto a oscilar preso a um ponto fora do seu centro de massa constituirá um pêndulo.

Nestes casos a massa já não pode mais ser considerada pontual. Sua distribuição em relação ao eixo de rotação já é significativa e precisa ser considerada sob o ponto de vista da Dinâmica da Rotação.

Materiais utilizados

- haste de suspensão
- régua
- trena
- balança
- cronômetro
- barra de metal com vários furos

Metodologia

Para a realização deste experimento, os alunos posicionaram um barra com vários furos em uma haste de suspensão, criando assim um pêndulo físico.

O experimento é realizado tirando o pêndulo de seu estado de equilíbrio, com um ângulo ϕ, o colocando para oscilar, medindo seu período de 10 oscilações, para 20 furos diferentes ao longo da barra.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{massa:} & 423 \pm 1\,g \\ \text{altura:} & 100{,}0 \pm 0{,}5\ cm \\ \text{largura:} & 2{,}5 \pm 0{,}5\ cm \\ \text{espessura:} & 0{,}5 \pm 0{,}5\,cm \end{array}\right\}\ \text{barra}$$

Tabela 1

número de furos	d(cm)	r(cm)	t_1(s)	t_2(s)	t_3(s)	t_4(s)	t_m(s)	T(s)
1	2,50	47,5	15,586	15,750	15,808	15,799	15,730	1,573
2	5,00	45,0	15,616	15,653	15,574	15,663	15,620	1,562
3	7,50	42,5	15,400	15,422	15,530	15,447	15,450	1,545
4	10,00	40,0	15,119	15,307	15,297	15,180	15,226	1,523
5	12,50	37,5	15,079	15,229	15,141	15,125	15,144	1,514
6	15,00	35,0	14,980	14,963	14,911	14,967	14,955	1,496
7	17,50	32,5	14,852	14,899	14,842	14,692	14,821	1,482
8	20,00	30,0	14,770	14,813	14,774	14,844	14,800	1,480
9	22,50	27,5	14,604	14,742	14,711	14,719	14,694	1,469
10	25,00	25,0	14,877	14,901	14,688	14,718	14,796	1,480
11	27,50	22,5	14,696	14,811	14,899	14,742	14,787	1,499
12	30,00	20,0	15,268	15,057	15,367	15,131	15,206	1,521
13	32,50	17,5	15,426	15,600	15,535	15,600	15,540	1,554
14	35,00	15,0	16,160	16,194	15,815	15,723	15,973	1,597
15	37,50	12,5	17,170	17,127	17,128	17,155	17,145	1,715
16	40,00	10,0	18,193	18,891	18,664	18,256	18,601	1,860
17	42,50	7,5	21,143	20,830	20,850	20,920	20,936	2,094
18	45,00	5,0	24,752	24,696	25,211	24,930	24,897	2,490
19	47,50	2,5	33,752	34,502	34,281	33,586	34,030	3,403
20	50,00	0	0	0	0	0	0	0

Discussão e Resultados

① Defina o raio do giro (R).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2+r^2}{gr}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2\left(\frac{R^2+r^2}{gr}\right)$$

$$\frac{R^2+r^2}{gr} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$R^2 = \left(\frac{T^2}{4\pi^2}gr\right) - r^2 \rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{T^2 gr}{4\pi^2}\right) - r^2}$$

Considerando "r" e "T" da Tabela, foi possível calcular o raio de giro para cada furo da barra

* $R = (0{,}2695\,m)$ - valor médio

-Tabela 2

nº furos	raio de giro(m)	nº furos	raio de giro (m)	nº furos	raio de giro(m)	nº furos	raio de giro(m)
1	0,258	6	0,268	11	0,268	16	0,276
2	0,266	7	0,268	12	0,271	17	0,276
3	0,267	8	0,271	13	0,273	18	0,273
4	0,265	9	0,268	14	0,269	19	0,267
5	0,270	10	0,271	15	0,275	20	

② Demostre que Tmin é dado pela equação (7). Além disso demonstre a equação (8) e (9)

Eq 7 → $$T = 2\pi \left(\frac{R^2 + r^2}{gr}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d}{dr} 2\pi \left(\frac{R^2+r^2}{gr}\right)^{1/2} = 2\pi \frac{1}{2} \left(\frac{R^2+r^2}{gr}\right)^{-1/2} \left(\frac{2r}{gr} - \frac{R^2+r^2}{g^2r^2} g\right) =$$

$$\pi \left(\frac{R^2+r^2}{gr}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{2r}{gr} - \frac{R^2+r^2}{g^2r^2} g\right)$$

$$T_{min} = \pi \left(\frac{R^2+r^2}{gr}\right)^{-1/2} \left(\frac{2r}{gr} - \frac{R^2+r^2}{g^2r^2} g\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2\cancel{r}}{gr} \cdot \frac{(R^2+r^2)}{g^{\cancel{2}}r^2} g = 0 \Rightarrow \frac{2}{g} = \frac{R^2+r^2}{gr^2}$$

$$2r^2 = R^2 + r^2$$
$$R^2 = r^2 \quad R = r$$

$$\left(\frac{R^2+r^2}{gr}\right)^{-1/2} = 0 \Rightarrow R^2 + r^2 = 0$$
$$R = r$$

substitui-se em (6)

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2+r^2}{gR}} = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{R}(R+R)}{g\cancel{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

(8) e (9)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2+r^2}{gr}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\left(\frac{R^2+r^2}{gr}\right)$$

$$T^2 gr = 4\pi(R^2+r^2)$$
$$T^2 gr = 4\pi R^2 + 4\pi r^2$$
$$4\pi^2 - Tgr + 4\pi R^2 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = r_1 + r_2$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi^2} = R^2 = r_1 r_2$$

③ A partir dos dados obtidos, procure explorar o experimento o máximo possível

a) Faça um gráfico de T em função de d → anexado (gráfico 1)

b) Ajuste da equação (6) aos valores experimentais, considerando que $g = 9{,}8\ m/s^2$ e determine o período mínimo com o qual este pêndulo pode oscilar ($R = 0{,}2695\ m$)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2+r^2}{gr}} \ (6) \rightarrow T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2 \cdot 0.2695}{9.8}} = 1.4735$$

c) Determine, a partir de um determinado período T, os valores r_1 e r_2. A partir de r_1 e r_2, determine o raio de giro equivalente R e a aceleração da gravidade g, utilizando as equações 7, 8 e 9. Compare o valor R e g obtidos nesta questão com o R da questão anterior e $g = 9{,}8\ m/s^2$.

Ao se traçar o gráfico 2 (em anexo), é possível observar que existem pontos em que o período é igual. Para os cálculos, foi usado $d_1 = 10$ cm,

$T = 1{,}523s$ e $d_2 = 30$ cm, $T = 1{,}521s$, pois a diferença do período nesses pontos é muito pequena

Sendo d, a distância do furo até a extremidade e r, a distância do furo até o centro de massa e o comprimento da barra 1,0 m, temos

$r_1 = 50 - d_1 = 40\,cm = 0{,}40\,m$ e $r_2 = 50 - d_2 = 20\,cm = 0{,}20\,m$

Assim, substituindo em (8), utilizando $T = 1{,}522\,s$, que é a média dos períodos:

$r_1 + r_2 = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$ $\quad (0{,}40 + 0{,}20)\,4\pi^2 = (1{,}522)^2 \cdot g$

$g = 10{,}22\ m/s^2$

Já na equação (9):

$r_1\, r_2 = R^2$ $\quad 0{,}40 \cdot 0{,}20 = R^2$ $\quad R = 0{,}2828\,m$

comparando com $R = 0{,}2695\,m$ e $g = 9{,}8\ m/s^2$ os valores encontrados estão na faixa de erro esperada.

d) Com a massa m da barra e o raio de giro R determinado a partir do gráfico, calcule o momento de inércia I_c equivalente dado pela equação (5)

$m = 0{,}4237$ Kg

$I_c = mR^2$ $\quad I_c = 0{,}4237 \cdot (0{,}2828)^2 = 0{,}03390\ Kg\,m^2$

e) Compare esse valor com aquele esperado para uma barra rígida sem furos!

$I_c = \frac{1\,M L^2}{12}$, $M = 0{,}4237$ Kg e $L = 1{,}0\,m$ $\quad I_c = \frac{0{,}4237}{12} = 0{,}03520\ Kg\,m^2$

O valor encontrado se encontra numa faixa de erro menor que 15%

Conclusão

Foi possível concluir que o experimento teve resultados próximos aos esperados teoricamente, e que possibilitou um maior aprendizado sobre pêndulo físico.

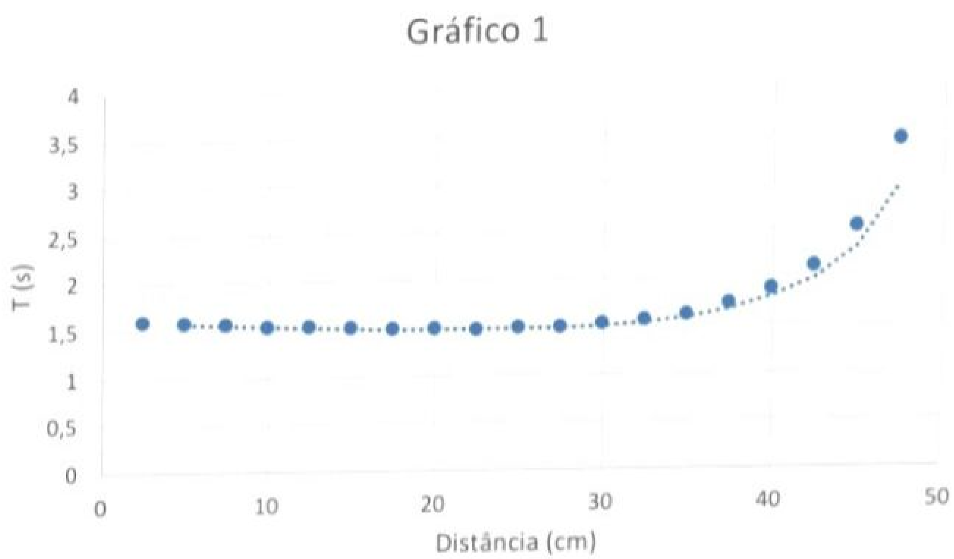
Gráfico 1
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
T (s)
0
10
20
30
40
50
Distância (cm)

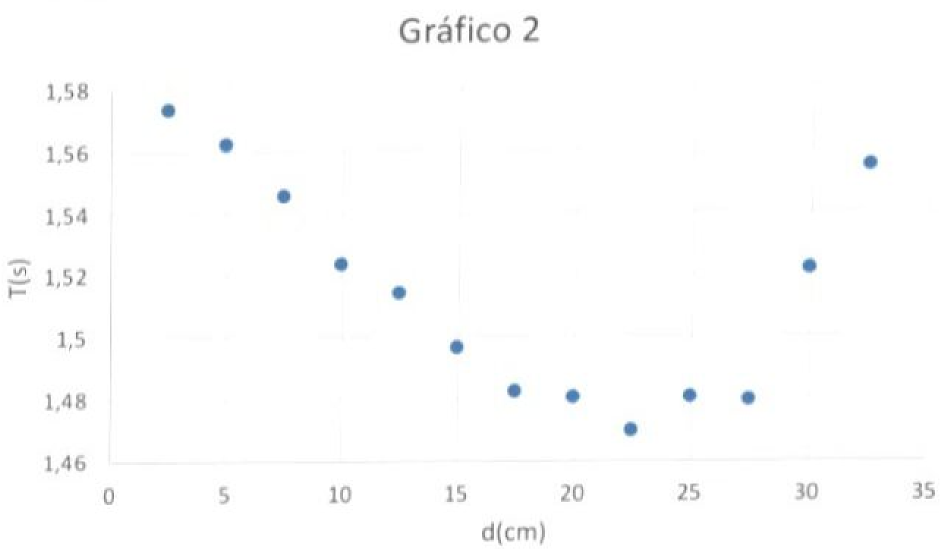
Gráfico 2
1,58
1,56
1,54
1,52
1,5
1,48
1,46
T(s)
0
5
10
15
20
25
30
35
d(cm)