Universidade de São Paulo
MAT0341

História das Equações Algébricas

Alissa Pontin n°USP 12560724
Isabela Tami n°USP 12561051
Felipe Oliveira Costa n°USP 11880052
Laís Nascimento n°USP 12560940

SÃO PAULO
2023

SUMÁRIO

1. Introdução

Antes de discutirmos a história das equações algébricas, é fundamental compreender o que é uma equação algébrica e, além disso, o conceito de álgebra. A palavra “álgebra” tem origem árabe e significa “restauração”, sugerindo a ideia de recuperar o valor que está sendo procurado. Ao contrário da aritmética, que aborda os números de maneira quantitativa, a álgebra os aborda de maneira qualitativa. Em outras palavras, enquanto a aritmética utiliza valores em uma forma e realiza cálculos, a álgebra formula equações e exige pensamento lógico e algébrico. No entanto, a álgebra não se resume a simples aritmética com letras; ela não requer símbolos para existir, assim como a música não necessita de notas musicais. Podemos, portanto, interpretar a álgebra como a arte de declarar um desconhecido e raciocinar logicamente sobre ele.

As equações algébricas podem ser consideradas a linguagem da álgebra, sendo atualmente definidas como uma igualdade em que a incógnita está sujeita às operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação. Exemplificando, são consideradas equações algébricas:

$ax + b = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$
$x^{-2} = 4 + \sqrt{7x}$

Porém, não são equações algébricas:

$e^{x} + x = 3$
$senx + 3 = 0$

Agora que exploramos as definições de álgebra, aritmética e equações algébricas, abordaremos brevemente a história da álgebra. Os primeiros registros do pensamento algébrico remetem aos babilônios, conforme evidenciado por tabuletas de escrita cuneiforme em argila que apresentam problemas geométricos envolvendo comprimentos e áreas de forma genérica, ou seja, aplicáveis a qualquer caso. Por exemplo, um problema babilônico declara: “Eu somei a área dos meus dois quadrados: 1,525. (O lado) do segundo quadrado é igual a dois terços do lado do primeiro mais 5”. Este problema babilônico reflete o pensamento algébrico e representa um dos primeiros registros de álgebra na história. Embora gregos e egípcios tenham abordado problemas semelhantes, resolveram-nos de maneira ilustrativa e geométrica, não de forma algébrica.

Depois dos babilônios, temos registros de Diofanto de Alexandria que introduziu o “número desconhecido” e pensamento lógico sobre ele, usando letras para nomear o “desconhecido” e até números negativos. Assim, ele mostrou como fazer equações por restauração e confrontação.

A seguir, destacamos a contribuição do matemático indiano Brahmagupta (598-668) para a história da álgebra, marcada pela introdução do conceito de zero e pela apresentação da primeira solução geral de uma equação quadrática, caracterizando uma álgebra reconhecível. Por fim, é importante ressaltar a contribuição do matemático árabe Al-Khwarizmi que trouxe em seus livros resoluções dissertativas de problemas algébricos.

Agora que exploramos brevemente os conceitos e a história da álgebra, abordaremos mais profundamente os matemáticos que contribuíram significativamente para as soluções de equações de segundo grau e superiores.

2. Cardano e Tartaglia

2.1 Resolução de equações do segundo grau

Até então, os matemáticos sabiam como resolver equações do tipo $ax + b = 0$ ou até mesmo $ax^2 + c = 0$, onde eles "isolavam" a incógnita do problema proposto e conseguiam obter o resultado desejado. No entanto, equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, eram difíceis de serem resolvidas, ainda mais quando sua solução não se tratava de um número inteiro. Então Sridhara, um matemático hindu, descobriu uma fórmula que resolvia equações do segundo grau:

Seja uma equação de segundo grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$, então $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Essa fórmula, hoje conhecida por Fórmula de Bháskara por ter sido encontrada primeiramente em um livro deste matemático, foi obtida por manipulações algébricas que consistem no processo a seguir:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a} =- c + \frac{b^2}{4a} \Leftrightarrow$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essa fórmula além de resolver as equações de segundo grau, também trouxe uma descoberta interessante para o problema "Dados x e y tais que $x + y = S$ e $xy = P$, e sejam S e P valores pré determinados, então qual será o valor de x e y?", já que essas duas equações podem ser reescritas por uma equação de segundo grau:

Se $x + y = S$ e $xy = P$, então $y = S - x$, e $x(S - x) = P \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$, o que poderia ser resolvido pela fórmula de resolução de equações do segundo grau.

2.2 Questionamentos sobre resolução de equações de grau superior a 1

Após se tornar conhecida a fórmula descoberta por Sridhara, os matemáticos chegaram à conclusão de que: equações de grau superior a um tinham mais de uma solução, algumas soluções da equação de segundo grau levavam a um número negativo algo desconhecido pelos matemáticos até então, e havia uma fórmula matemática que resolvesse a equação de segundo grau.

Assim, vieram alguns questionamentos sobre as raízes de números negativos e se haveria uma fórmula de resolução de equações superiores às de segundo grau. Muitos matemáticos correram atrás de descobrir uma fórmula que resolvesse equações de terceiro grau. Leonardo Fibonacci em meados de 1200 recebeu um problema a ser resolvido pelo Imperador Frederico II que dizia o seguinte:

"Seja x um segmento tal que $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, qual é o valor de x?"

Fibonacci conseguiu um resultado perto o suficiente que satisfizesse a equação, porém não era um resultado exato, além disso ele não conseguia explicar algebricamente como ele havia chegado a tal resultado.

Então Luca Pacioli, ao estudar a fundo sobre as equações algébricas e, perceber que nenhum matemático havia chegado a uma conclusão sobre soluções de equações de terceiro grau, publicou em sua obra *Suma de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, que não haveria uma fórmula que resolvesse equações de terceiro grau.

2.3 Solução da equação de terceiro grau

Na Itália em meados do século XVI, houve um novo interesse pelo estudo da matemática. Por volta de 1510, Scipione del Ferro era um desses pensadores e conseguiu obter uma fórmula para a solução da equação de forma $x^3 + px + q = 0$. Nessa época era bastante comum guardar as descobertas matemáticas para si, para participar de duelos matemáticos e assim, após o duelo, tornar público suas descobertas. Então del Ferro só revelou sua descoberta a seu aluno Antonio Maria Fior e acabou falecendo sem poder revelar a outros essa fórmula.

Na mesma época vivia Nicòlo Fontana de Brescia, que havia tido uma infância conturbada no qual tropas francesas invadiram Bréscia que era sua cidade de origem, e sua família teve que se refugiar em uma igreja, onde eles foram encontrados e Nicòlo teve sua boca ferida por um dos soldados, sua cicatriz em sua boca deu nome a seu codinome utilizado em suas obras: Tartaglia, que significa gago em italiano. Além de uma infância conturbada, Tartaglia não tinha condições de pagar uma escola, no entanto, sua vontade de aprender foi tão grande que com carvões e livros achados, ele conseguiu se achar na matemática e se tornou professor de ciências em Verona, Vicenza, Bréscia e Veneza.

Fior tinha conhecimento dessa paixão por matemática de Tartaglia e resolveu desafiá-lo a um duelo matemático, onde ambos deveriam resolver uma série de desafios envolvendo equações de terceiro grau. Tartaglia acabou descobrindo que Fior estava armado com os métodos conhecidos por Scipione del Ferro, mas mesmo assim topou o desafio, e além de ter descoberto como resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, também achou a fórmula para a resolução de equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Assim, Fior saiu derrotado do duelo por Tartaglia, pois só sabia do método ensinado a ele.

O método de Tartaglia era composto por duas partes:

I) Reduzir uma equação do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Seja $a \neq 0$, desejamos achar uma mudança de variável que anule o coeficiente do termo elevado ao quadrado. Assim:

Seja

$x = y + m$:

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0 \Leftrightarrow ay^3 + y^2(b + 3am) + y\left(3am^2 + 2bm + c\right) + \left(am^3 + bm^2 + cm + d\right) = 0 \Leftrightarrow y^3 + y^2\left(\frac{b+3am}{a}\right) + y\left(\frac{3am^2+2bm+c}{a}\right) + \left(\frac{am^3+bm^2+cm+d}{a}\right) = 0$$

Como queremos anular o coeficiente de y², então $b + 3am = 0 \Leftrightarrow m =- \frac{b}{3a}$ então:

$$y^3 + \frac{1}{a}\left(3a\left(- \frac{b}{3a}\right)^2 + 2a\left(- \frac{b}{3a}\right) + c\right)y + \frac{1}{a}\left(a\left(- \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(- \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(- \frac{b}{3a}\right) + d\right) = 0$$

Onde $x = y + m$, e y é a solução da equação acima de forma $x^3 + px + q = 0$ e m é o valor que deixa nulo o coeficiente da equação em função de y.

II) Resolução da equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Seja $x = A + B$, então $x^3 = (A + B)^3 \Leftrightarrow x^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$. Como $x = A + B$, $x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx \Leftrightarrow x^3 - 3ABx - \left(A^3 + B^3\right) = 0$. Assim, p = -3AB e q = $-\left(A^3 + B^3\right) \Leftrightarrow A^3B^3 =- \frac{p^3}{27}$ e $A^3 + B^3 =- q$. Portanto, podemos concluir que A³ e B³ são raízes da equação $x^2 - (- q)x + \left(- \frac{p^3}{27}\right) = 0$.

Então:

$$A^3 = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ e } B^3 = \frac{-q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Como $x = A + B$:

$$x= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Assim, Tartaglia conseguiu reduzir uma equação de terceiro grau qualquer a $x^3 + px + q = 0$, e utilizar a fórmula já conhecida por Scipione del Ferro e Antonio Maria Fior.

Cardano era um celebrado médico da época, que também era um conhecedor assíduo das áreas de astrologia, ciências e matemática. Cardano também era conhecido por ser um professor de grande renome em Bolonha e Milão. Ao contrário de Tartaglia, ele já havia nascido em uma boa condição, apesar de ter alguns problemas familiares em sua vida adulta. Ao ter o conhecimento de que Tartaglia havia triunfado nos desafios propostos por Fior, resolveu chamá-lo a sua casa, insinuando que iria arranjar um encontro entre o matemático e um possível patrono. Tartaglia então, conhecido por sua prática de divulgar resultados sem revelar os métodos de resolução, acabou por compartilhar seu método com Cardano. No entanto, solicitou a ele sigilo sobre o método, porém, ao ter acesso aos apontamentos de del Ferro e perceber que Tartaglia não foi o pioneiro na descoberta da resolução de equações cúbicas, decidiu tornar público o método. Assim, em 1545, Cardano publicou seu livro "Ars Magna", um marco na história da matemática. Para os contemporâneos de Cardano, este livro representou uma quebra de paradigma ao apresentar pela primeira vez os princípios para resolver equações cúbicas e quárticas, revelando suas raízes através de expressões com radicais, em uma abordagem similar à usada para equações de segundo grau na época. Cardano não reivindicou a autoria dessas descobertas, creditando a Scipione del Ferro as cúbicas e a Ludovico Ferrari as quárticas.

3. Bombelli

Rafael Bombelli (1526 - 1572) foi um matemático nascido na Itália, sendo o filho mais velho de seis filhos. Não recebeu educação universitária, mas foi ensinado por um arquiteto-engenheiro chamado Pier Francesco Clementi. A história de seu trabalho se inicia na sua curiosidade por estudar a álgebra e os números algébricos, pensando principalmente no contexto da época em que estava sendo muito discutido sobre a resolução para equações do terceiro grau. Essa ideia de estudo surgiu a partir da solução da equação de terceiro grau de Cardano/Tartaglia, na conclusão de que sendo $x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ ele tentou resolver para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ e chegou para

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

. Na verdade, diversos matemáticos já tinham chego nesse resultado, porém todos paravam aí por acreditarem que a equação já estava na forma mais irredutível possível. Bombelli foi o primeiro a questionar se não havia uma solução para tal problema fora dos números reais, e foi aí que deu início aos seus estudos acerca da insuficiência dos números reais. Para isto, Bombelli decidiu considerar que as raízes quadradas de números negativos fossem números verdadeiros. Ele admitiu que a raíz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$ seria um número do tipo a - $\sqrt{b}$ e que $2 + \sqrt{-121}$ seria um número do tipo a + $\sqrt{b}$. Neste caso, então x = a + $\sqrt{b}$ + a - $\sqrt{b}$ = 4 e, portanto, a=2. Assumindo que se aplicam a estes números as regras de cálculo já conhecidas, tem-se que

$$2 + \sqrt{b} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

$$\left(2 + \sqrt{b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

$$\left(2 + \sqrt{b}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$8 + 12\sqrt{b} + 6b + b\sqrt{b} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$(8 + 6b) + (12 + b)\sqrt{b} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Então, b=-1 e a equação está satisfeita. Nasce então um novo tipo de número, que utiliza a unidade imaginária , tal que i² = -1, que será retomada em breve.

De uma forma mais generalizada, usou uma equação da forma (x-a)(x-b)(x-c). Se o igualarmos a zero teremos uma equação de 3º grau cujas raízes são x=a, x=b e x=c. Observe que tipo de relação deverá haver entre a, b e c para o desenvolvimento desse produto leve a uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$, cuja fórmula resolutória seria
$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$. Visando anular o termo do segundo grau, é necessário que a + b + c = 0, ou ainda, c = -a - b =-(a+b). Substituindo na equação geral, tem-se que

$$(x-a)(x-b)(x+[a+b]) =$$

$$x^3 - (a+b-\ (a+b))x^2 + (ab + b(-\,(a+b)) + a(-\,(a+b)))x \\ - ab\big(-\,(a+b)\big) =$$

$$x^3 + [ab - (a+b)^2]x + ab(a+b)$$

e fazendo $x^3[ab-(a\ +\ b)^2]x + ab(a+b) = 0$, encontra-se uma equação cúbica de raízes x=a, x=b e x=-(a+b). Agora, aplicando na fórmula de Cardano/Tartaglia

$$x = \sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2} + \sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}} +$$

$$\sqrt[3]{-\frac{ab(a+b)}{2} - \sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3}}$$

Tomemos a expressão sob o radical quadrático, chamando de Δ

$$\Delta = \left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab-(a+b)^2}{3}\right)^3$$

$$\Delta = \frac{4a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6}{108}$$

portanto,

$$\Delta = -\frac{(a-b)^2(2a+b)^2(a+2b)^2}{108}$$

Assim, Δ será sempre um número negativo e, como na fórmula usa-se a raíz de Δ, Bombelli conclui que era preciso sim trabalhar com a raiz de números negativos, o que hoje conhecemos como números imaginários ou complexos, que foi denominado por Euler séculos depois.

Então, Bombelli sentiu que nenhuma das obras sobre álgebra dos principais matemáticos de sua época fornecia uma exposição cuidadosa e completa do assunto. Em vez de outro tratado complicado que apenas matemáticos poderiam compreender, Rafael decidiu escrever um livro sobre álgebra que pudesse ser compreendido por qualquer pessoa. Seu texto seria independente e facilmente lido por aqueles sem educação superior. Foi então quando escreveu “A álgebra“, obra dividida em 5 volumes e que questionava a insuficiência dos números reais. Na obra, apresentava como resolver cálculos com números negativos e inclui estudos sobre os “números complexos”, por isso pode ser chamado como pai dos números complexos. Em seu livro, resolveu equações usando o método de del Ferro / Tartaglia. Ele introduziu a retórica que precedeu os símbolos representativos + i e - i e descreveu como ambos funcionavam. A seguir há um trecho em que ele explica, de forma bem prática e clara, como tratar de números negativos:

"Mais vezes mais marcas mais

Menos vezes menos marcas mais

Mais vezes menos marcas menos

menos vezes mais marcas menos

Mais 8 vezes mais 8 marcas mais 64

Menos 5 vezes menos 6 marcas mais 30

Menos 4 vezes mais 5 marcas menos 20

Mais 5 vezes menos 4 faz menos 20"

E há também o trecho em que ele explica como tratar de números complexos:

"Mais por mais de menos, torna mais de menos.

Menos por mais de menos, torna menos de menos.
Mais por menos de menos, torna menos de menos.
Menos por menos de menos, torna mais de menos.
Mais de menos por mais de menos, torna menos.
Mais de menos por menos de menos, torna mais.
Menos de menos por mais de menos, torna mais.
Menos de menos por menos de menos torna menos."

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1,$$
$$(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = 1,$$
$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1,$$
$$(\pm 1)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1},$$
$$(\pm 1)(-\sqrt{-1}) = \mp\sqrt{-1}.$$

Conforme pretendido, Bombelli utilizou uma linguagem simples, como pode ser visto acima, para que qualquer pessoa pudesse entendê-la. Mas, ao mesmo tempo, ele foi meticuloso. De imediato, ele deixa claro que as regras da aritmética para números imaginários não são as mesmas que para números reais. Esta foi uma grande conquista, já que vários matemáticos subsequentes ficaram extremamente confusos sobre o assunto. O matemático evitou confusão dando um nome especial às raízes quadradas de números negativos, em vez de apenas tentar lidar com elas como radicais regulares, como outros faziam. Isso deixou claro que esses números não eram positivos nem negativos. Esse tipo de sistema evita a confusão que Euler encontrou. Bombelli chamou o número imaginário *i de* "mais ou menos" e usou "menos ou menos" para *-i*. Ele também teve a clarividência de ver que os números imaginários eram cruciais e necessários para resolver as equações quárticas e cúbicas. Na época, as pessoas se preocupavam com os números complexos apenas como ferramentas para resolver equações práticas. Assim, Rafael conseguiu obter soluções usando a regra de Scipione del Ferro, mesmo no caso irredutível, em que outros matemáticos como Cardano haviam desistido.

Para finalizar, trago aqui uma exemplificação das notações utilizadas por Bombelli em sua obra:

Notação moderna	Publicada por Bombelli	Escrita por Bombelli
$5x$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$
$5x^2$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$
$\sqrt{4+\sqrt{6}}$	Rq⌊4pRq6⌋	R⌊4pR6⌋
$\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$	Rc⌊2pRq⌊0m121⌋⌋	R³⌊2pR⌊0m121⌋⌋

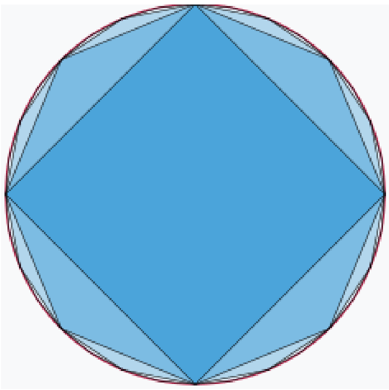
4. Viète

François Viète (1540-1603) se formou em direito pela Universidade de Poitiers e trabalhou em altos cargos da corte de Henrique III e IV, chegando a auxiliar os reis em missões confidenciais. Além de ser influente na política, Viète estudava matemática no seu tempo livre e com isso chegou a fazer avanços significativos na álgebra.

Ademais, ele teve contribuições na astronomia, por ter feito uma coletânea de tabelas trigonométricas, na criptografia, decifrando cartas, na história do calendário, propongo o calendário gregoriano, na historia do numero π, usando uma aproximação por produto infinito (1), na geometria, resolvendo um problema de apolônio (2) e na álgebra por ter explicitado as relações entre os coeficientes de uma equação polinomial e suas raízes (3).

A seguir, será explicado melhor o avanço que Viète realizou nos três últimos tópicos:

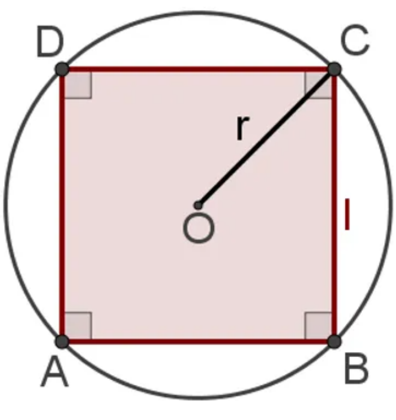
(1) História do número π



Para achar uma nova aproximação de pi a partir de um produto infinito, Viète comparou áreas de polígonos de 2^n lados. Ou seja, ele fez a razão entre a área de um quadrado (2^2) e um octógono (2^3), multiplicou com a razão entre a área de um octógono (2^3) e um hexadecágono (2^4) e continuou essa multiplicação de razões até chegar na área de um polígono de 2^{n-1} e 2^n lados. Realizando esse produto, o francês chegou na relação a seguir:

$$\frac{A2^2 lados}{A2^3 lados} \cdot \frac{A2^3 lados}{A2^4 lados} \cdots \frac{A2^{n-1} lados}{A2^n lados} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Contudo, fica nítido do lado esquerdo da igualdade que a área do octógono ($A2^3 lados$) pode ser cancelada e analogamente $A2^4 lados$, $A2^5 lados$... Assim, sobrará apenas $\frac{A2^4 lados}{A2^n lados}$ e se n tender para infinito, teremos a área de um quadrado dividida pela área de um círculo. A área do círculo é πr^2, já a do quadrado será $2r^2$ visto que, se aplicarmos o teorema de pitágoras no triângulo ACB, $l^2 + l^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{2}r$. Dessa forma, como a fórmula de área de quadrado é lado ao quadrado, a área ABCD será $(\sqrt{2}r)^2 = 2r^2$.



Assim, se fizermos $\frac{A2^4 lados}{A2^n lados}$,com n tendendo ao infinito, teremos $\frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$. Por fim, temos que:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Ou seja, uma aproximação de π usando um produto infinito

(2) Problema de Apolônio

“ Dados três objetos do plano, cada um dos quais é um ponto, uma reta ou uma circunferência, encontrar todas as retas e todas as circunferências tangentes simultaneamente aos três.”

(3) Coeficientes na álgebra

Antes de Viète, grandezas desconhecidas já haviam sido simbolicamente representadas por Diofanto. No entanto, o grande avanço proporcionado por Viète foi a introdução do uso de letras para representar parâmetros arbitrários do problema, como os coeficientes em uma equação. Essa inovação possibilita, por exemplo, a expressão do método geral por meio de uma fórmula. Viète é frequentemente referido como o "pai da álgebra moderna" devido a essa contribuição significativa.

Em 1591, Viète publicou um livro intitulado "A Arte Analítica". Neste livro, ele não apenas trata da introdução de símbolos para coeficientes de equações, como mencionado anteriormente, mas também aborda questões relacionadas à resolução de equações de graus superiores. Por exemplo, dada a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, Viète resolveria da seguinte maneira:

$x = p + q$

$(p + q)^2 - 5(p + q) + 6 = 0$

$p^2 + 2pq + q^2 - 5p - 5q + 6 = 0$

$p^2 + 2pq - 5p + q^2 - 5q + 6 = 0$

$p^2 + p(2q - 5) + q^2 - 5q + 6 = 0$

$\downarrow$

$2q - 5 = 0$

$q = 5/2$

$p^2 + (5/2)^2 - 5(5/2) + 6 = 0$

$p^2 + 25/4 - 25/2 + 6 = 0$

$p^2 = (-25 + 50 - 24)/4$

$p^2 = 1/4$

$p =+- 1/2$

$x1 = 5/2 + 1/2 = 6/2 = 3$

$x2 = 5/2 - 1/2 = 4/2 = 2$

Além disso, no livro a arte analítica, Viète discorre sobre “o problema de resolver todos os problemas” . Ou seja, o esforço dos matemáticos da época em criar um método matemático abrangente e universal que pudesse ser aplicado à resolução de uma ampla variedade de problemas matemáticos. Nos dias de hoje, conhecemos esse método pela álgebra e equações algébricas, porém na época, solucionar o problema de resolver todos os problemas ainda estava se consolidando e Viète tentou contribuir para tal.

Seus tratados buscaram unificar álgebra e método analítico, estabelecendo um novo padrão para resolver problemas. Inspirado por Diofanto, Viète introduziu a logística speciosa, um cálculo literal sobre símbolos, para resolver problemas matemáticos de forma axiomática. Viète pretendia restaurar a análise dos antigos e elevar a álgebra a uma ciência nos moldes gregos, contrastando com a utilização fragmentada pelos árabes. "Pai da álgebra moderna," Viète queria resolver todos os problemas matemáticos, conferindo à álgebra nova importância na ciência matemática da época.

Viète dividiu seu método analítico em três fases. A primeira é a zetética, que seria a arte de traduzir o problema, transformando-o em uma ou mais equações. A segunda é a porística, a qual examinamos a verdade de um teorema já ordenado, por meio da igualdade ou proporção, ou seja, estudo de certas passagens do caminho analítico cuja reversibilidade não é assegurada. Por fim, a terceira é a Exegética, aquela pela qual encontramos a quantidade ou grandeza procurada, por meio da igualdade ou proporção já ordenada, sendo assim, a resolução efetiva do problema. Os antigos já conheciam dois tipos de análise, a zetética e a porística, porém a exética foi criada por Viète.

A segunda fase do método analítico gera dúvidas entre os historiadores, por não estar preocupada na efetiva resolução do problema. Porém, fica nítido que a zetética seria a fase de tradução, passando o problema para a linguagem algébrica e a exética seria a resolução efetiva dele.

A logística speciosa está mais relacionada à fase zetética, onde Viète introduziu o uso sistemático de letras para representar as quantidades de um problema, permitindo a expressão do problema em forma de equação. Assim, enquanto a logística speciosa se concentra na representação simbólica, as fases zetética, porística e exegética do método analítico de Viète descrevem o processo mais amplo de formular, resolver e interpretar problemas matemáticos.

A abordagem axiomática de Viète se resume na tentativa de transformar axiomas da geometria, encontrados nos Elementos, para a álgebra. Por exemplo:

1. Que o todo é igual às suas partes.
2. Que coisas iguais a uma mesma são iguais entre si. [...]
5. Que, se multiplicamos coisas iguais por coisas iguais, então os produtos são iguais.

Por fim, Viète também criou a “lei dos homogêneos” . Essa lei foi criada a fim orientar a comparação de grandezas, enfatizando a necessidade de comparar apenas grandezas homogêneas. Ele usava notações específicas, como "A cubo" para A^3, e estabeleceu escalas e gêneros para representar adequadamente as grandezas. Assim, grandezas escalares, como lado, quadrado e cubo, eram designadas de acordo com seus gêneros, como comprimento, plano e sólido.

Viète definiu regras claras para garantir o cumprimento da lei dos homogêneos: grandezas homogêneas podem ser adicionadas ou subtraídas, mas a multiplicação resultava em grandezas heterogêneas. Ele enfatizou que a aplicação de uma grandeza a outra também geraria grandezas heterogêneas. Essa abordagem visava assegurar uma comparação consistente de grandezas homogêneas, com Viète fornecendo uma lista de escalas e gêneros para orientar a representação correta.

6. Abel e Galois

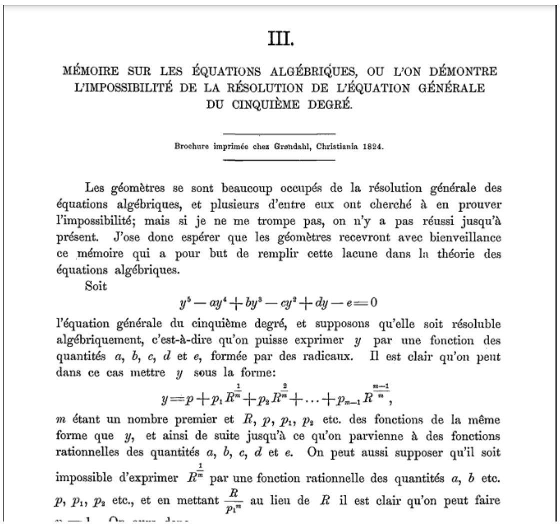
Niels Henrik Abel e Évariste Galois foram dois matemáticos que revolucionaram a teoria de equações algébricas. Abel, nascido na Noruega em 1802, morreu aos 26 anos, mas em sua curta vida publicou trabalhos fundamentais sobre equações integrais, equações funcionais e equações polinomiais. Em 1824, Abel provou que não existe uma fórmula geral, com radicais, para resolver equações polinomiais de grau cinco ou superior. Essa descoberta, conhecida como Teorema de Abel-Ruffini, encerrou um problema que havia sido perseguido por matemáticos por séculos.

Galois, nascido na França em 1811, também morreu jovem, aos 20 anos. No entanto, em seus poucos anos de vida, Galois desenvolveu uma teoria geral das equações algébricas, conhecida como Teoria de Galois. Essa teoria fornece uma maneira de classificar as equações algébricas de acordo com a sua resolubilidade. A Teoria de Galois tem aplicações em diversas áreas da matemática, como a teoria dos números, a teoria das funções algébricas e a teoria dos grupos.

Os trabalhos de Abel e Galois tiveram um impacto profundo na matemática. Eles estabeleceram as bases para o desenvolvimento da teoria de equações algébricas e abriram caminho para novas descobertas em diversas áreas da matemática.

A seguir, são apresentados alguns dos principais resultados dos trabalhos de Abel e Galois:

1) Abel provou que não existe uma fórmula geral, com radicais, para resolver equações polinomiais de grau cinco ou superior. Essa descoberta encerrou um problema que havia sido perseguido por matemáticos por séculos.



III.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES, OU L'ON DÉMONTRE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania 1824.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'y a pas réussi jusqu'à présent. J'ose donc espérer que les géomètres recevront avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$$

l'équation générale du cinquième degré, et supposons qu'elle soit résoluble algébriquement, c'est-à-dire qu'on puisse exprimer y par une fonction des quantités a, b, c, d et e, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous la forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}},$$

m étant un nombre premier et R, p, p_1, p_2 etc. des fonctions de la même forme que y, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à des fonctions rationnelles des quantités a, b, c, d et e. On peut aussi supposer qu'il soit impossible d'exprimer $R^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle des quantités a, b etc. p, p_1, p_2 etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire

2) Galois desenvolveu uma teoria geral das equações algébricas, conhecida como Teoria de Galois. Essa teoria fornece uma maneira de classificar as equações algébricas de acordo com a sua resolubilidade. A Teoria de Galois é um ramo da álgebra abstrata que estuda as relações entre as raízes de uma equação algébrica e o seu grupo de simetria. A ideia central dessa teoria é que as raízes de uma equação algébrica estão relacionadas entre si de uma maneira que pode ser descrita por um grupo. Esse grupo, chamado de grupo de Galois da equação, é um grupo de permutações das raízes da equação. Assim, uma equação algébrica é solucionável se o seu grupo de Galois é um grupo finito.

Os trabalhos de Abel e Galois são considerados um dos mais importantes avanços da matemática do século XIX. Eles continuam a ser estudados e aplicados por matemáticos até hoje.

7. Conclusão

Como pôde ser observado, as equações algébricas tiveram seu início há muito tempo, basicamente desde o começo da humanidade. Porém a maioria de suas descobertas não são distantes na linha do tempo. Por exemplo, os números imaginários foram inventados há menos de 500 anos, mais ou menos na mesma época do descobrimento do Brasil. Sendo assim, podemos considerar tais equações como muito recentes ainda. Outro fator curioso é de que diversos matemáticos em algum momento enfrentaram um emblema de que a matemática da época não era tão desenvolvida quanto o raciocínio e as ideias deles, sendo assim, tiveram que primeiro inventar termos e conceitos para poderem resolver equações “simples” para nós hoje em dia. Mas é de extrema importância salientar que Para a álgebra e as equações algébricas serem o que conhecemos hoje, muitos estudiosos, principalmente os que vimos aqui, precisaram dar sua contribuição.

8. Bibliografia e referências

1. SCHUVAAB, J. L. - Resolução de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica, UEM - Maringá, 2013.
2. BOYER, C. B - História da Matemática, Edusp, São Paulo.
3. GARBI, Gilberto G - O romance das equações algébricas, 4ª edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.
4. DEVLIN, Keith - Palestra The birth of Algebra, University of Stanford, 2012.
5. E Bortolotti (ed.) - *R Bombelli L'Algebra, Books I-V* , Milan, 1966.
6. CORRÊA, Bruna - A Introdução à arte analítica de François Viete, UFRJ- Rio de Janeiro, 2008.
7. M. P. do Carmo, A. C. Morgado, E. Wagner, Trigonometria - Números Complexos IMPA-VITAE, 1992.
8. CERRI, Crisitina - História dos Números Complexos, IME USP, São Paulo, 2001.
9. Lang, S. - Algebraic Number Theory. Springer, 2002