A Matemática Antiga: África e China

Profº Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

Aísha Lorenzo

Manuela Souza

Millene Duarte

Rodrigo Oliveira

1 África

O continente Africano é vasto em extensão territorial, contendo 54 países cada qual com diversos povos, culturas, idiomas e história por vezes milenar como o Egito e Etiópia. Aqui estão citados alguns extratos históricos sobre o desenvolvimento e evolução matemática alguns destes povos e por ventura comum culturalmente aos mesmos.

1.1 África Subsaariana

1.1.1 Mali

O Império Mali começou como um pequeno reinado do povo Malike fundado pelo príncipe Sundiata Keita em 1226 d.C, segundo o historiador Ibne Caldune. Foi uma das Economias medievais mais poderosas da África subsaariana, rica em recursos como ouro e marfim.
Com a chamada Era de Ouro do Império Mali dada pelas ações tomadas pelo seu mais famoso Mansa (rei), Mansa Musa houveram grandes avanços nas mais diversas áreas. Dentre eles, medidas como a introdução do Islã como religião oficial da nobreza e garantia de liberdade religiosa dos cidadãos, houve o investimento nos centros acadêmicos do país como as cidades de Djenne, Timbuktu. Centros estes, situados em locais estratégicos que permitiam um grande intercâmbio cultural devido à rotas comerciais. Por fim o massivo financiamento da Universidade de Sankoré, sendo o segundo o maior acervo de manuscritos e livros da África desde a biblioteca de Alexandria contendo entre 400.000 e 700.000 itens em árabe, tamashek, turco, fulani, etc.
Além disso, os assuntos cobertos pelos estudiosos desses centros acadêmicos listavam dentre os mais variados. Via-se por exemplo a investigação e estudo em áreas como filosofia, arquitetura, literatura, poesia, astronomia, economia e matemática. Os registros históricos apontam para uma prolífica produção relativa em especial em relação à lei islâmica, medicina, astronomia e matemática, porém os estudos atuais destes livros e manuscritos estão ganhando atenção dos historiadores há pouco tempo na historiografia moderna, como

o Projeto de Conversação dos Antigos Manuscritos de Tombuctu (MLI/015) em 2008, uma parceria do Luxemburgo e Mali.
Ainda assim, como a maioria dos projetos estão em fase de digitalizar e preservar os manuscritos, a tradução dos textos para idiomas além dos idiomas originais ainda caminha em pequenos passos.

Figura 1: Manuscritos no Centro Ahmed Baba

Pode-se ver, entretanto, com o material disponível que o conhecimento matemático elaborado pelos estudiosos do Mali eram de um caráter majoritariamente utilitário e religioso, apesar de não absolutamente. Vê-se que muitos os documentos produzidos que tinham como corpo o tema matemática eram por exemplo, um livro sobre problemas relativos à divisão de heranças ou impostos pela lei islâmica, problemas matemáticos relacionados à economia e mercado, ou problemas matemáticos relativos à astronomia. Esta última, que apesar de também possuir um caráter decerto que científico, ainda está ligada à associações práticas do dia-a-dia como a noção passagem das estações e guia para navegação e viagens. Todavia, a matemática "pura" era estudada como disciplina nos centros acadêmicos, sendo referenciadas obras como Os Elementos de Euclides e outras.
Este livro, por exemplo, um dos mais recentes (Entre 1700 d.C. e 1799 d.C) era utilizado por estudantes do Mali e norte da África. Nele o estudioso al-Rasmuki explica um trabalho de outro matemático medieval al-Samlali. Para

isso, ele utiliza diagramas e exemplos para resolver problemas matemáticos, demonstra as regras de aritmética básica e discute a teoria e desenvolvimento da matemática ao longo da história.

Figura 2: Páginas 72 e 58 do livro "Explicações de problemas Aritméticos com Exemplos" de Ahmad ibn Sulayman al-Rasmuki

Este outro manuscrito que data de 1733 era utilizado para a formação e treino de acadêmicos no campo da astronomia. Neste texto se trabalham diversos temas, dentre eles como usar o movimento das estrelas para calcular quando começam as estações do ano e inclui também um diagrama representando a rotação dos astros no céu.

Figura 3: Páginas 39 e 95 do livro “As estrelas importantes na multidão dos céus”

Assim como este livro intitulado “Sobre o cálculo dos números na ciência da astronomia.” com origem entre 1700 e 1799, também temos um compilado de exemplos do uso da matemática aplicada ao campo da astronomia, a parte final deste manuscrito está perdida.

Figura 4: Páginas 12 e 21 do livro “As estrelas importantes na multidão dos céus”

Este por fim, não é um livro, mas sim um acordo comercial, que data entre 1500 e 1900. Ele mostra como ouro era utilizado como moeda de troca para as mais diversas trocas comerciais como escravos ou goma arábica. Ele trata de diversas cidades, e contém informações interessantes sobre o custo de construção de casas em Messinah.

1.1.2 Benin

O Reino do Benin foi um dos mais importantes reinos africanos, localizado hoje onde é a atual Nigéria e datando suas origens no século XI. Suas cidades, em especial a capital do Benin, Edo, mostravam-se como um notável feito da engenharia humana. Os portugueses, que chegaram na cidade em 1485 que popularizaram o nome "A Grande Cidade do Benin" , comumente utilizado hoje pelos historiadores. Porém, atualmente existem poucos resquícios dessa grande cidade planejada devido às campanhas do exército britânico que visavam a destruição estratégicas de cidades como controle colonial.
O que se observa nas seguintes descrições são ruas planejadas, geometricamente arranjadas, com iluminação e saneamento que exigem complexos e precisos conhecimento arquitetural e matemático, e tal como os manuscritos do Mali, a documentação e investigação acerca destes centros urbanos, suas culturas e ciências estão chegando apenas recentemente nos centros acadêmicos.

Figura 5: Desenho de Edo feito por um oficial britânico em 1897

Em 1897 as disputas locais e internas favoreceram os ataques e roubos britânicos que dominaram o território que veio a se tornar a Nigéria. Existindo poucas estruturas originais da cidade como ruínas, tampouco obras de arte que não estejam guardadas em museus britânicos.

1.1.3 Fractais Africanos

O Matemático Ron Eglash estudou diversas culturas e povos africanos espalhados pelo continente em razão da observação da ocorrência de arquitetura recursiva em algumas de suas observações. Foi observado que mesmo em culturas totalmente diferentes e/ou geograficamente dispersas, este padrão estético e arquitetural estava presente como um traço comum em todo o continente.

Quanto à intencionalidade, por vezes a origem da representação destes objetos era incerta, por vezes intencional. No segundo caso, a estrutura carregava em cada iteração um simbolismo hierárquico ou religioso. Como por exemplo a Cidade do Benin previamente citada, ou as vilas Ba-ila no sul da Zâmbia, onde a cada iteração, cada casa implicava em um menor status em relação à casa central do chefe da vila. E em cada casa havia um pequeno altar onde havia uma pequena vila onde segundo a espiritualidade local, viveriam os espíritos dos os ancestrais, e dentro das pequenas casas dos espíritos haveriam outras pequenas casas com os ancestrais dos ancestrais, e assim recursivamente ao infinito.

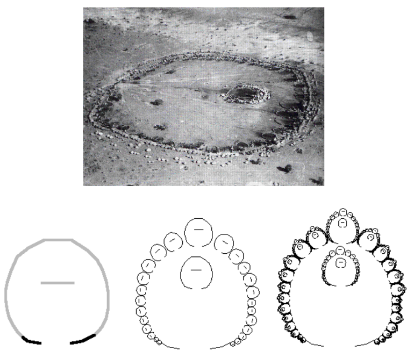


Figura 6: imagem aérea da vila Ba-ila e um esquema de sua organização fractal

1.2 Egito Antigo

A Civilização Egípcia, ao contrário de seus vizinhos babilônios, não tinham tantos problemas com guerras por estarem relativamente isolados e não estarem em uma rota comercial. Além disso, eram considerados um povo extremamente religioso, gerando a construção de várias pirâmides com significado sagrado. Com isso, havia grande interesse na construção civil.
Também tinham um setor agrícola que necessitava de apoio matemático, visto que, ao longo do tempo, sua população teve seu ápice de aproximadamente 4 milhões de pessoas. Porém, não havia uma motivação pela matemática como os gregos, sendo algo mais utilitário para suas necessidades do cotidiano. Por isso, não se tornou tão desenvolvida quanto a matemática Grega e Chinesa da Antiguidade.

1.2.1 Aparelhos de medição utilizados na Engenharia e Agricultura

Na civilização Egípcia, eram utilizados vários aparelhos de medição para necessidades do cotidiano, como o fio de prumo e a corda de 12 nós. Veremos alguns desses aparelhos abaixo:

Fio de Prumo

Foi inventado pelos astrônomos egípcios em aproximadamente 3000 a.C. Desse modo, era usado como ferramenta de alinhamento em construções da época e até hoje continua sendo utilizado na mesma função.
Funcionava por meio do alinhamento da linha que apontava para o céu, que tinha que ser projetada no solo através do fio.
Um ponto importante é que os operários da época trabalham com um prumo leve em alturas muito pequenas, que não ultrapassem os seis metros. Já para construções de grandes alturas, era necessário a utilização de prumos mais pesados, menos sensíveis ao vento.

Relógio de Sol

O Relógio de Sol é considerado hoje em dia o mais antigo relógio de sol conhecido. Estima-se que ele foi construído por volta de 1500 a.C., na Civilização Egípcia.

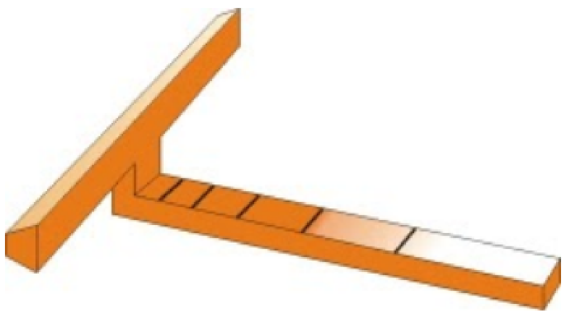


Figura 7: Relógio de Sol Egípcio

Como na imagem acima, esse instrumento tinha o formato da letra T, que era voltado para a direção leste, durante o período da manhã e na direção oeste durante o período da tarde. Desse modo, a posição da sombra da parte superior do T indicava, de forma quase exata, qual hora do dia era. Dessa maneira, próximo ao horário do meio-dia, ele era virado de lado para medir a sombra do sol, já que, à tarde, ele incidia em uma direção diferente; embora indicasse apenas dez horas no total, a primeira e a última se perdiam na penumbra.

Corda de 12 nós

Há registros de que os agrimensores do Egito Antigo utilizavam uma corda dividida em 12 partes iguais por 12 nós para construírem triângulos com lados medindo 3, 4 e 5 unidades e, com isso, demarcarem ângulos retos, sendo algo muito útil em construções civis.

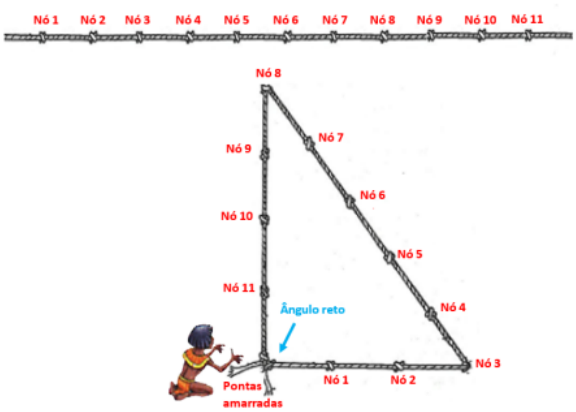


Figura 8: Corda de 12 nós

1.2.2 Metrologia

Há cerca de 4.000 anos, os egípcios usavam, como padrão de medida de comprimento, o cúbito, que é a distância do cotovelo à ponta do dedo médio. Os egípcios resolveram então fixar um padrão único: em lugar do próprio corpo eles passaram a usar em suas medidas barras de pedra com o mesmo comprimento (cúbito padrão).

1.2.3 A Grande Pirâmide

Atualmente estima-se que a Grande Pirâmide de Gizé foi construída por volta de 2600 a.C. Dessa maneira, normalmente eram construídas para se tornarem túmulos de faraós ou grandes autoridades em geral.
É estimado que o erro relativo envolvendo os lados da base quadrada é inferior a 1/14.000 e o erro relativo envolvendo os ângulos retos dos vértices da base não é maior do que 1/27.000. Nessa perspectiva, tal tarefa foi realizada por um exército de 100.000 trabalhadores num período de 30 anos.

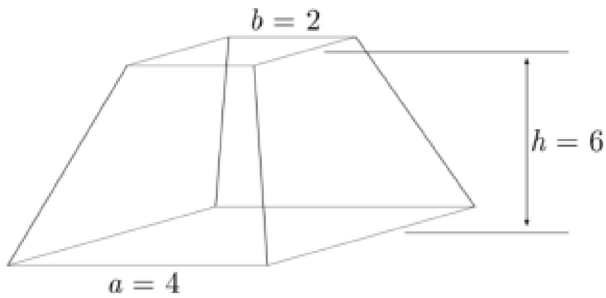
1.2.4 Desafios

Papiro Moscou ou Golenischev

É um texto matemático que contém 25 problemas vindos do Egito Antigo. Um de seus mais famosos problemas é uma forma curiosa de calcular o volume de um tronco de uma pirâmide:

"Se lhe disserem: Aqui está uma pirâmide de 6 de altura, com um lado abaixo de 4 e no topo de 2."

Uma imagem possível do problema abaixo:



A seguinte solução é apresentada em seguida:

"Calcule o quadrado de 4, encontrando 16. Dobre 4, obtendo 8. Calcule o quadrado de 2. Isso será 4. Some esses 16, 8 e 4, encontrando 28. Calcule 1/3 de 6. Isso será 2. Conte 28 duas vezes. Vai ser 56. Olha, é 56, você acertou."

Papiro de Rhind

Um outro papiro famoso é o papiro de Rhind, que contém problemas geométricos variados que calculam as inclinações de pirâmides e o volume de depósitos de diversos formatos, além de problemas comerciais do cotidiano, como o problema abaixo:

Valor total = 84 shaty
Valor total para 1 deben de ouro, 1 deben de prata e um deben de estanho = 21 shaty
Peso de cada metal = 84/21 = 4 deben
Valor do ouro = 12x4 = 48 shaty
Valor da prata = 6x4 = 24 shaty
Valor do estanho = 3x4 = 12 shaty

1.2.5 Olho de Horus

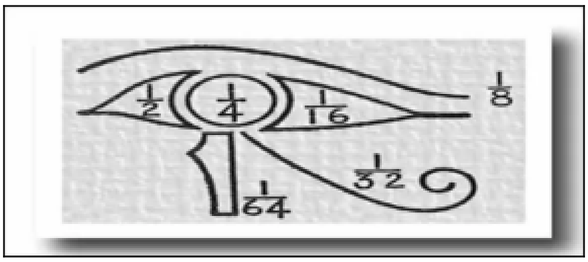


Figura 9: Olho de Horus

O olho de Horus possui certas proporções matemáticas, ilustradas como frações:

1/2 representa o olfato

1/4 representa a visão

1/8 representa o pensamento

1/16 representa a audição

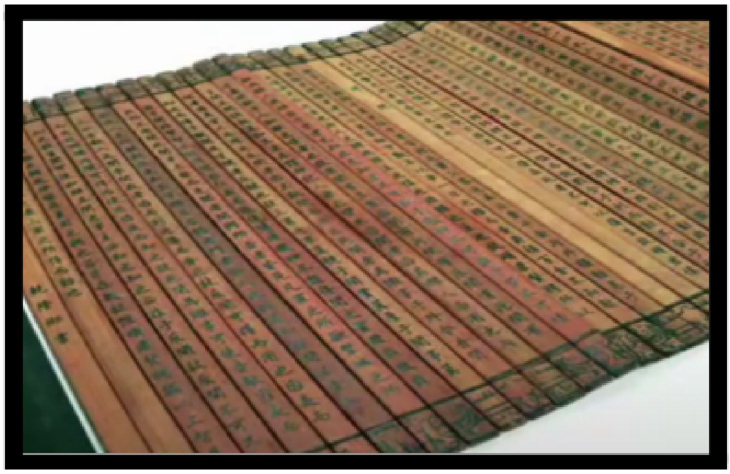
1/32 representa o paladar

1/64 representa o tato

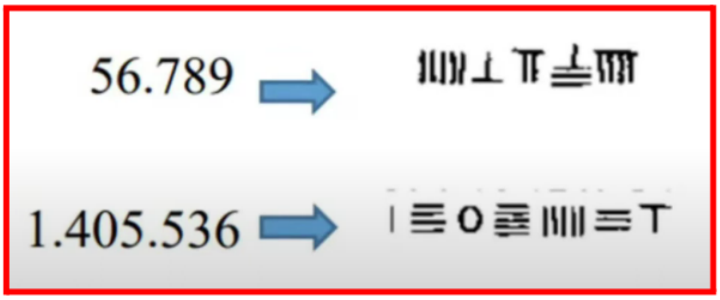
2 China

2.1 Período Shang

Transcrições na escrita oráculo em ossos, cascas de tartarugas e bambus:



Escrita de qualquer número da esquerda para direita:



2.2 Período Chou

Um dos mais antigos trabalhos matemáticos sobreviventes:

Composto pelos Nove Capítulos da História da Matemática:

1º capítulo

Cálculo de áreas de terrenos (planos ou não) e áreas do triângulo, trapézio e o circulo quando $\pi = 3$

2º capítulo

Porcentagem e proporção

3º capítulo

Regra de 3

4º capítulo

Determinação de lados de figuras, incluindo cálculo de raízes quadradas e cúbicas

5° capítulo

Volumes e construções civis

6° capítulo

Distribuir o cereal e o trabalho a diferentes setores da população

7° capítulo

A regra da falsa posição para resolver tipos de problemas como determinar incógnitas em equações

8° capítulo

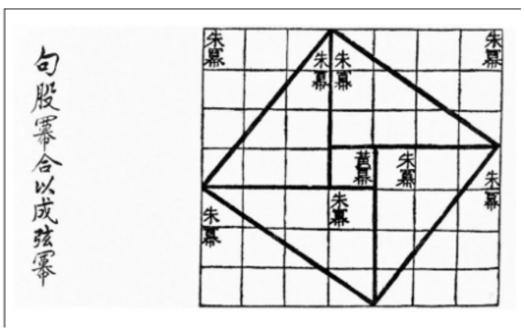
Sistema de equações lineares e procedimentos matriciais

9° capítulo

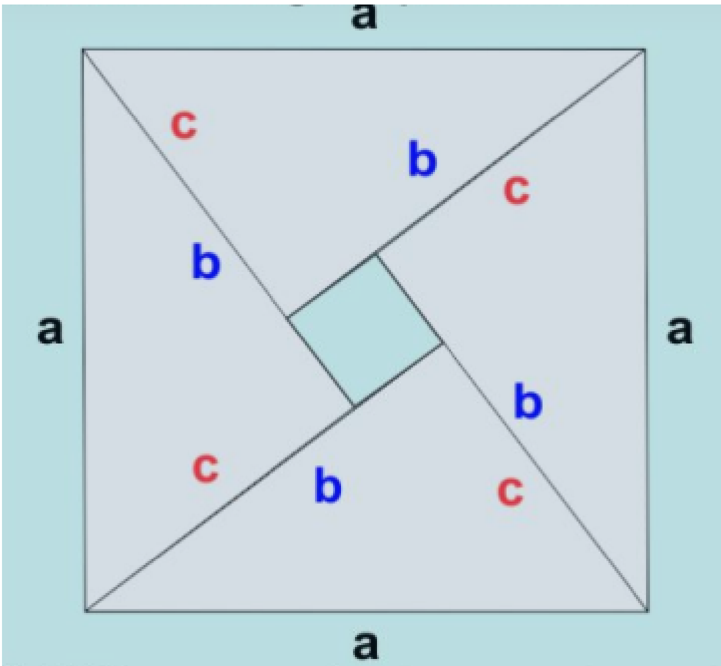
Triângulos retângulos pitagóricos

2.3 Dinastia Han

Durante a Dinastia Han, encontra-se na China o Teorema de Gougu Jiuzhang, datado do século III a.C. e atribuído ao matemático chinês Zhou Bi. Este Teorema é equivalente ao mais conhecido popularmente Teorema de Pitágoras. A demonstração a seguir foi encontrada no capítulo 9 da coleção "Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática":



Trata-se de uma demonstração gráfica informal, composta por 4 triângulos retângulos escalenos idênticos conforme mostra a imagem. Para compreender melhor a demonstração, pode-se nomear os lados desta forma:



Demonstração:

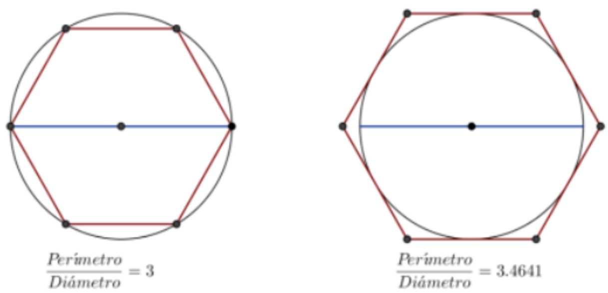
Queremos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$. Primeiramente, notamos que a área do quadrado maior é igual a a^2, enquanto a área do quadrado menor é $(b - c)^2$. Sabemos também que a área de cada triângulo é $(c \,.\, b)/2$. Logo, podemos igualar a área do quadrado maior com a soma da área dos quatro triângulos e do quadrado menor. Assim, teremos que:

$$a^2 = \frac{4bc}{2} + (b-c)^2 \tag{1}$$

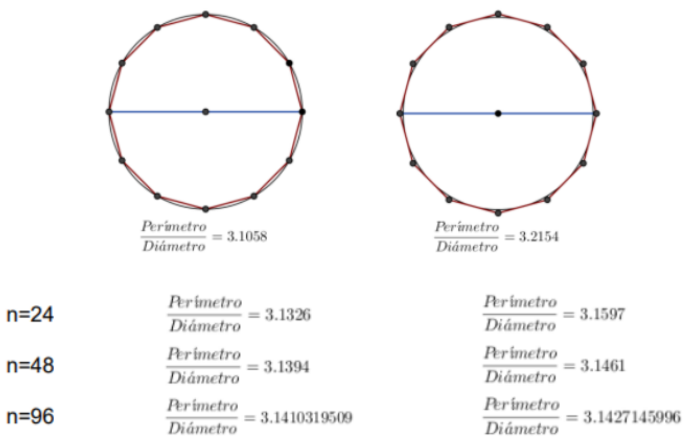
$$a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2 \tag{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{3}$$

No século III, o matemático chinês Liu Hui, nascido em Zibo, deixou sua marca na história ao determinar uma nova aproximação do número pi (π). Inspirado pelo método do matemático grego Arquimedes, Liu Hui aprimorou a técnica de inscrever e circunscrever polígonos regulares a um círculo. Esta abordagem funciona da seguinte maneira: primeiro inscreve-se um polígono regular de n lados em uma circunferência de raio conhecido de modo que os vértices desse polígono estejam na circunferência. Posteriormente, outro polígono regular de, também, n lados é circunscrito a esta mesma circunferência de modo que os lados deste polígono tangenciam a circunferência no ponto médio de cada lado. O exemplo a seguir mostra o método sendo aplicado através de polígonos regulares de 6 lados: Em seguida, calcula-se



o perímetro de cada polígono e divide pelo comprimento do diâmetro da circunferência. Por fim, a chave da estimativa é comparar estas razões. O comprimento da circunferência está entre os perímetros dos polígonos, isso significa que quanto mais lados o polígono tiver (ou seja, quanto maior o valor de n), mais próximo do valor de π será a média das duas razões encontradas. Liu Hui utiliza esta abordagem e calcula manualmente o perímetro de

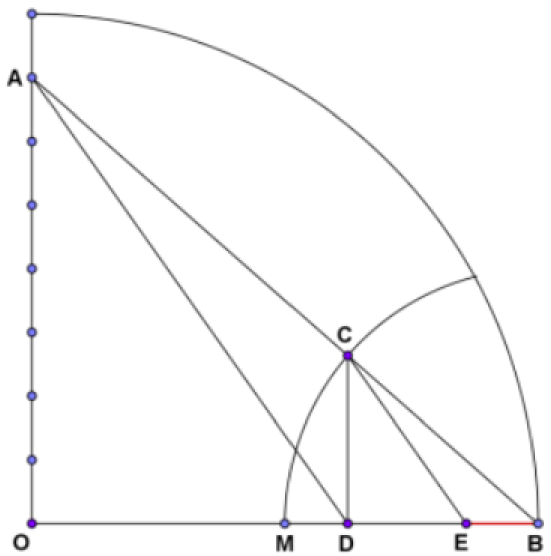


polígonos cada vez maiores. Primeiramente, o matemático utilizou polígonos regulares de 96 lados, encontrando a aproximação de 3,14. E depois utilizou polígonos regulares de 3072 lados, encontrando a melhor aproximação até então: 3,14159.

2.4 Pós Han

No século V, outro matemático chinês se destacou ao encontrar uma nova aproximação do número pi. Ele encontra essa aproximação através de uma construção gráfica seguindo os seguintes passos:
- Desenha um quadrante de uma circunferência de raio igual a 1;
- Representa o ponto A a uma distância 7/8 da origem O;
- Representa o ponto médio M do segmento OB;
- Traça um arco de circunferência de centro B e raio BM, BM igual a 1/2;

- Traça, agora, o segmento AB que corta o arco anterior no ponto C;
- Pelo ponto C, traça um segmento paralelo ao segmento OA que corta OB em D;
- Pelo ponto C traça um segmento paralelo a AD, que corta o segmento OB em E. A partir dessa construção, ele encontra o valor do segmento EB, o qual, somado com três, apresenta o valor muito próximo do valor de pi: 3,14159292



Este valor é encontrado a partir de casos de semelhanças de triângulos e utilizando o teorema de Pitágoras. Esse valor foi considerado a melhor aproximação do número pi pelos 900 anos seguintes.
Uma das mais importantes contribuições chinesas para a Matemática foi o Teorema Chinês dos Restos. O registro mais antigo sobre ele é de Sun-Tsu no século IV.
O teorema surge a partir da necessidade de descobrir a quantidade de soldados mortos após uma batalha. Os generais chineses costumavam contar suas tropas perdidas após a guerra da seguinte forma: ordenavam que as tropas formassem várias colunas com um determinado tamanho e depois contavam quantas sobravam, e faziam isto para vários tamanhos diferentes.

Por exemplo: supondo que um general inicia uma batalha com 2000 soldados e, ao seu término, ele precise verificar quantos homens não retornaram. Com esse propósito, ele alinha os soldados em colunas de 7, sobrando 5 deles. Quando os organiza em grupos de 9, restam 4. E quando os alinha em grupos de 10, sobra apenas 1. Quantos soldados morreram sabendo que, pelo menos, 1500 voltaram? Para resolver este problema é necessário lidar com congruências, e é neste momento que o Teorema Chines dos Restos é formulado.

Teorema 5.1 (Teorema Chinês dos Restos). Sejam $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t$ inteiros positivos primos entre si dois a dois (i.e. tais que $\text{mdc}(n_i,\ n_j) = 1 \quad \forall \quad i \neq j$). Então o sistema de congruência lineares

$$\begin{cases} y \equiv \ E_1 \mod n_1 \\ y \equiv \ E_2 \mod n_2 \\ y \equiv \ E_3 \mod n_3 \\ \vdots \\ y \equiv \ E_t \mod n_t \end{cases}$$

tem solução única, $\mod (n_1 n_2 n_3 \cdots n_t)$, onde $E_1,\ E_2,\ E_3,\ \cdots,\ E_t$ são inteiros dados.

Referências Bibliográficas

http://parquedaciencia.blogspot.com/2014/08/matematica-na-antiguida de-china.html

https://www.mat.uc.pt/ mat0703/PEZ/China2.htm

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6081521/mod$_{r}esource/content$

https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-trea sure-arithmetic-from-timbuktu

http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/index.html

https://www.loc.gov/search/?fa=subject:timbuktu+manuscripts

revealinghistories.org.uk/colonialism-and-the-expansion-of-empires/arti cles/the-empire-of-benin-and-its-cultural-heritage.html

https://users.math.yale.edu/public$_{h}tml/People/frame/Fractals/Panorama/Architecture/$

https://www.youtube.com/watch?v=WWIKqvi$_{e}dI$

https://pt.wikipedia.org/wiki/Universidade$_{d}e_{S}ancor$

http://muslimheritage.com/the-university-of-sankore-timbuktu/