UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
MAT0341 - História da Matemática I

João Vitor Cezario Sanches, n°12560575
Maitê Magalhães Lima, n° 12560787
Marília Silva dos Santos, n° 12567353

# A guerra do cálculo

São Paulo
2023

## 1. Introdução

Sir Isaac Newton (1642 - 1726) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) disputaram por cerca de 10 anos a autoria do que hoje é conhecido como cálculo diferencial e integral. Newton desenvolveu o denominado método de fluxos e fluentes durante os anos 1665 e 1666 enquanto era estudante de Cambridge e estava recluso em sua fazenda devido à peste bubônica que assolou a ilha da Grã-Bretanha nesse período. Já Leibniz fez sua descoberta cerca de 10 anos depois, em 1975, durante o período que passou em Paris.

Sendo assim, o presente trabalho tem como objetivo apresentar e discutir a história do cálculo, desde seu início histórico com a ideia das séries infinitas, passando pelo conceito de limite e a ideia do infinitesimal, assim como sua autoria, que agora é dada como uma co-fundação de Leibniz e Newton, mas que por muito tempo gerou brigas, acusações e tomadas de partido. Além disso, o trabalho visa trazer as demonstrações e os desenvolvimentos que os dois matemáticos tiveram do cálculo até chegar em seus denominados métodos.

## 2. Séries infinitas, o conceito de limite e o infinitesimal

Primeiramente, é importante notar que o conceito de limite não tinha sido desenvolvido por Leibniz ou por Newton, mesmo que o último, no começo do livro I do Principia, tentou dá-lo uma formulação precisa. Newton já havia descoberto o papel preliminar que o limite teria no Cálculo, sendo essa a semente da definição moderna.

Anos depois, o primeiro cientista a perceber como a formalidade da derivada depende de uma definição robusta para o limite foi D'Alembert, no livro escrito por ele e Diderot publicado em 1751: *Encyclopédie.* Nele, D'Alembert afirma algo muito similar ao que vemos hoje em dia, embora escrito sem o rigor matemático da atualidade:

> Um valor é dito ser o limite de um outro valor quando o segundo pode se aproximar do primeiro dentro de algum valor dado, de qualquer modo pequeno, embora o segundo valor nunca possa exceder o valor ao qual se aproxima. (D'Alembert, 1751)

Em 1784, a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para quem explicasse com sucesso uma teoria do infinito pequeno e do infinito grande na matemática e que pudesse ser usado no cálculo como um fundamento lógico e consistente. Embora esse prêmio tenha sido ganho por Simon L'Huilier (1750 – 1840) pelo seu trabalho "longo e tedioso", este não foi considerado uma solução para os problemas propostos. Lazare N. M. Carnot (1753 – 1823) propôs uma tentativa popular de explicar o papel do limite no cálculo como "a compensação dos erros", mas não explicou como estes erros se balançariam perfeitamente.

Sem muitos avanços na robustez do cálculo por meio século, Lagrange, que estava usando cálculo muito frequentemente no desenvolvimento da Mecânica Lagrangiana, se deparou com pouca robustez nessa área da matemática, e assim tentou (sem muito sucesso) formalizar o cálculo algebricamente, eliminando inteiramente o conceito de limite e infinitésimos.

Já no século XIX, Augustin Louis Cauchy estava procurando uma exposição rigorosamente correta do Cálculo para apresentar a seus estudantes de engenharia na École Polytechnique de Paris. Cauchy começou seu curso com uma definição moderna de limite (que já estava implicitamente sendo desenvolvida por Bolzano). Em suas notas de aula, que se tornaram papers clássicos, Cauchy usou o limite como a base para a introdução precisa do conceito de continuidade e de convergência, de derivada e de integral.

Um exemplo desse uso por cauchy foi na definição de derivadas:
Considere $\delta$, $\varepsilon$ como dois números muito pequenos, o primeiro ($\delta$) é escolhido tal que para todos os valores absolutos de $h$ maior que $\delta$, e para qualquer valor de $x$ incluso (no intervalo definido), a razão $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}$ seja sempre maior que $f'(x) - \varepsilon$ e menor que $f'(x) + \varepsilon$.

Entretanto, à Cauchy tinham passado despercebidos alguns dos detalhes técnicos. Niels Henrik Abel (1802 – 1829) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet estavam entre aqueles que procuravam por problemas delicados e não intuitivos.

Entre 1840 e 1850, enquanto era professor da High School, Karl Weierstrass determinou que a primeira etapa para corrigir esses erros deveria começar pela definição de limite de Cauchy em termos aritméticos estritos, usando-se somente valores absolutos e desigualdades. À Weierstrass é atribuída a notação "lim" para o limite de uma função, que inicialmente tinha $a \to b$ logo à frente e que fora modificada para a atual $\lim\limits_{a \to b}$ por Hardy em 1908. Sabemos dos avanços de Weierstrass por textos de seus alunos (mais notoriamente H. A Schwarz e Eduard Heine) visto que ele nunca publicou suas notas de aula diretamente.

## 3. A História de vida de Sir Isaac Newton[1]

Newton nasceu durante a Guerra Civil Inglesa, em 4 de janeiro de 1643, de acordo com o calendário gregoriano, já pelo calendário Juliano, nasceu em 25 de dezembro de 1642. Vários biógrafos proclamam que Newton nasceu no ano em que Galileu morreu, mas isso não é verdade, pois Galileu morreu em 1642 do calendário gregoriano. Essa confusão aconteceu porque a Inglaterra não adotou o calendário gregoriano no século XVII, uma vez que os protestantes resistiam ao que consideravam uma contaminação católica. Além disso, Newton nasceu prematuro e não se esperava que ele sobrevivesse, entretanto, ele viveu por mais de 80 anos.

A família de Newton era comum e de pouco acesso à educação. Seus avós e bisavós eram pequenos proprietários rurais, humildes. Seu pai não sabia ler nem escrever e morreu antes de Newton nascer e poucos meses depois de se casar com a mãe de Newton, Hannah Ayscough Newton. Hannah vinha de uma família com um pouco mais condições financeiras e

[1] Essa seção é baseada inteiramente no livro "A guerra do Cálculo" de Jason Socrates Bardi, sendo por vezes citado integralmente.

foi deixada viúva, grávida, com um patrimônio de 46 vacas, 234 carneiros e um par de celeiros cheios de milho, feno, malte e aveia em Lincolnshire (Bardi, 2008).

Hannah se casou novamente quando Newton tinha 3 anos, em 1645, com Barnabas Smith, um clérigo, com o qual teve mais 3 filhos. A mãe de Newton mudou-se para a paróquia do reverendo em North Witham, mas Isaac Newton não se deu bem nesse cenário e foi morar com os avós em Woolsthorpe.

Aos 12 anos, Newton foi para a escola primária e ficou hospedado em uma casa que era a loja de um boticário, Clark. Foi a primeira vez que Newton assistiu à mistura de produtos químicos e iniciou seu amor pela alquimia. Newton gostava de passar o tempo desenhando, consertando e construindo coisas como moinhos de vento e relógios de sol. Enquanto isso, sua educação na escola primária se baseou em aprender latim e um pouco de grego.

Aos 15 anos, Newton tinha que fazer viagens semanais para dirigir os negócios da família, mas não se interessava sobre isso e deixava seu criado pessoal cuidar de tudo, enquanto lia sobre outras coisas que o interessava. Em 1659, aos 17 anos, foi afastado dos estudos para assumir a administração da fazenda da família, mas passado alguns meses, ficou aparente que ele não servia para essa posição. Assim, sua mãe o mandou de volta para Grantham para que se preparasse durante 9 meses para a universidade, e, aos 18 anos, se matriculou no Trinity College da Universidade de Cambridge.

Após o período de estudos, Newton finalmente é aceito no Trinity College em 28 de abril de 1664, e estava consciente dos problemas que o cálculo iria resolver, como achar a área sob uma curva. Mas veio a peste, e assolou a Inglaterra, fazendo com que Cambridge fechasse suas portas no outono de 1665.

As maiores descobertas de Newton foram feitas enquanto estava em Cambridge, mas longe da universidade, durante o período em que ficou recluso por conta da peste, entre 1665 a 1667, chamados de "anos milagrosos". Foi nesse período de reclusão que Newton fez suas grandes descobertas e inclusive fez a experiência da decomposição da luz branca passando por um prisma. Essas experiências deram a Newton o material para seu livro Óptica e conceituou o material para seu livro Principia, escrito na década de 1680.

Nessa época, Newton fez descobertas também em relação à mecânica dos fluidos, à física das marés, às leis dos movimentos e à teoria da gravitação universal, além do cálculo (denominado por Newton de método de fluxos e fluentes). Ele colocava seus estudos acima de tudo, inclusive da alimentação, saúde, família ou a própria segurança. Esquecia de comer, tomar banho e há uma história de que seu gato ficou obeso porque comia toda a comida que

Newton deixava intocada durante seus períodos de pesquisa. Também por estar interessado em luz e visão, olhava fixamente para o sol por um longo tempo, para que pudesse observar as "fantasias" de cor que se formavam. Ele fez isso tantas vezes que tinha que se fechar durantes dias num quarto escuro para restaurar a visão. Ademais, ele tentou cutucar o fundo do olho com uma agulheta para modificar sua retina e ver como isso afetava sua visão em um de seus experimentos. Foi também nessa época que nasceu a lenda de Newton e a maçã, que foi popularizada por Voltaire, 75 anos depois (Bardi, 2008).

No Halloween de 1665, Newton começou também a escrever um pequeno tratado chamado "Como traçar tangentes a linhas mecânicas" e, semanas depois, continuou com o ensaio "achar as velocidades dos corpos pelas linhas que descrevem", uma prévia do cálculo.

Newton escreveu um manuscrito em 13 de novembro de 1665 explicando seu método de cálculo com exemplos. Em 16 de maio de 1666, inventou um método geral com várias propostas para resolver problemas resultantes do movimento e, em outubro de 1666, escreveu um panfleto de 48 páginas, com 8 proposições e com o título " Para resolver problemas resultantes do movimento, as proposições seguintes são suficientes". O trabalho tinha 12 problemas que seu método de análise podia resolver diretamente usando seus métodos aritméticos, incluindo o traçado de tangentes a curvas ou a taxa de variação instantânea (a derivada) em qualquer ponto ao longo da curva; achar os pontos de maior curvatura; determinar o comprimento de curvas, achar curvas cujas áreas sejam iguais; determinar a área sob uma curva (a integral) ou a área entre duas curvas (Bardi, 2008).

Newton também lia e relia materiais, como Descartes, até que conseguisse "dominar o livro". Um conteúdo que se tornou familiar para o estudioso foram as séries infinitas, e seu interesse sobre elas se deu porque estas ofereciam maneiras de encontrar soluções numéricas para problemas como a área de uma forma geométrica através de uma soma de série de números. John Wallis já havia feito progressos com esse tipo de análise e influenciou muito Newton, com seu livro Arithmetica infinitorum, o qual mostra alguns dos primeiros passos dados em direção ao cálculo. Lendo esse livro, Newton teve a inspiração de inventar um método geral para analisar as curvas geométricas utilizando álgebra, ou seja, teve a inspiração para a invenção do que viria a ser o "cálculo". A grande inovação de Newton foi ver as curvas em movimento, como se fossem geradas pelo movimento.

Em 2 de outubro de 1667, Newton recebeu de Cambridge seu diploma de mestrado e tornou-se Fellow do Trinity College. Deixou de lado a matemática e não fez mais nada com ela durante os 2 anos seguintes.

Em 1669, Newton conheceu Isaac Barrow, um matemático de Cambridge que o auxiliou a publicar seus trabalhos. Newton havia escrito alguns manuscritos no fim da década de 1660 e início de 1670 que descreviam o cálculo, mas não havia publicado nada, o que se manteria assim por décadas. O primeiro deles foi o "Sobre a análise por meio de equações tendo um número infinito de termos" de 1669, e um segundo livro, entre 1670 e 1671 chamado "Um tratado dos métodos das fluxões e das séries". Esses foram os primeiros de todos os textos a descrever o cálculo.

Se Newton tivesse publicado o De Analysi anteriormente, teria sido poupado de muita dor de cabeça. Entretanto, existem dois principais motivos para que não o tenha feito:

1. O grande incêndio de Londres, que queimou 373 dos 448 acres da cidade e afetou as editoras de livros e prejudicou seriamente a possibilidade de um matemático como Newton publicar o livro, já que as editoras estavam em crise.

2. Uma de suas primeiras tentativas ao publicar um trabalho seu, uma carta intitulada "Nova teoria sobre a luz e as cores" foi publicada na Philosophical Transactions em 19 de fevereiro de 1672 e enviada para ser lida perante os membros da Royal Society. Entretanto, essa carta causou diversos problemas, já que seus contemporâneos teriam que se confrontar com ideias novas que Newton trabalhava há anos, além de entrar em um debate com Robert Hooke, já que as ideias de Newton ameaçavam as ideias deste. Hooke tinha grande prestígio nessa época e era a maior autoridade em óptica na Grã-Bretanha e disse que todos os experimentos que Newton fez ele mesmo já havia feito antes. Houve violentas disputas entre os dois e Newton jurou não publicar mais nada durante décadas.

Sendo assim, Newton apenas deu uma cópia do De Analysi para Barrow, que escreveu para John Collins em 1669 sobre a descoberta do matemático. Poucos anos depois, em 1672, Newton propriamente descreveu seus métodos numa carta para Collins detalhando seu procedimento para achar tangentes a curvas  e Collins ficou tão maravilhado quando leu o De Analysi que mandou fazer uma cópia sem conhecimento de Newton. Esse fato é um dos principais que foram usados durante a Guerra do Cálculo para dizer que Leibniz havia cometido plágio.

Finalmente, em 1687, Newton publicou o Principia, livro que contemplava suas descobertas feitas durante os anos milagrosos sobre o funcionamento do mundo (gravidade e órbitas dos planetas, fluidos e marés, a matemática e a natureza da luz e da cor).

Já em 1689, Newton conheceu um matemático denominado Fatio. A intensa amizade entre eles no início da década de 1690 é fonte de especulação histórica, pois as cartas entre ambos eram extremamente afetuosas. Entretanto, também não há evidências de que Newton tenha nutrido algum interesse por qualquer um dos sexos.

Em 1693, Newton teve um colapso nervoso quase total, com sintomas como insônia, perda de apetite, perda de memória, melancolia e ilusões paranóicas. Alguns diagnósticos foram sugeridos, inclusive envenenamento por mercúrio, ou uma possibilidade de que ele era maníaco-depressivo, assim como um possível trauma profissional em que ele pode ter perdido valiosas anotações que continha cerca de metade do trabalho de toda sua vida sobre suas experiências em um incêndio. Uma outra teoria diz que ele ficou mal por causa de Fatio, já que a relação dos dois ficou conturbada após o amigo ficar doente com uma pneumonia em 1692, e, após dois encontros finais entre os dois em maio e junho de 1693, Fatio voltou para a Suíça e saiu da vida de Newton quase que para sempre. Ninguém sabe o que aconteceu.

Newton se tornou diretor da Casa da Moeda em 1696 e se mudou para Londres e tomou medidas para diminuir a questão da falsificação de moedas que assolava a Inglaterra e em 1699 se tornou mestre da Casa da Moeda.

Em 1703, Newton foi eleito presidente da Royal Society, e já aos 60 anos, em 1704, era professor aposentado da Universidade de Cambridge e muito famoso na Inglaterra e em outros países da Europa, passando seus últimos 30 anos de vida como funcionário do governo. Nessa época, Newton ainda não era o super famoso cientista que viria a ser. Isso mudou quando publicou seu livro Óptica, que relatava experiências e conclusões de Newton sobre o comportamento físico da luz e outros fenômenos ópticos.O livro era escrito em um estilo menos formal e se tornou um texto básico para o ensino de física do século seguinte. As descobertas que o livro Óptica traziam já eram sabidas há muito tempo por Newton, entretanto, ele levou cerca de 30 anos para finalmente compilá-las em seu livro e publicá-las em 1704. É também no livro Óptica que Newton reivindicou a invenção do cálculo, em uma pequena seção no final, um ensaio que Newton havia escrito uma dúzia de anos antes intitulado “Sobre a quadratura das curvas”.

Em 1705, um ano depois, Newton recebeu da rainha Ana da Grã-Bretanha o título de Cavaleiro, o que marcou o início do glorioso capítulo final de sua vida, ganhando status de celebridade no exterior e uma lenda viva.

Quando Newton morreu em 1727, após vencer a guerra do cálculo contra Leibniz, estava no ponto mais alto de sua fama e havia se tornado uma lenda viva. Newton morreu em 20 de março de 1727. Sua morte foi manchete de primeira página nos jornais britânicos e seu funeral foi um acontecimento e em 28 de março de 1727 foi enterrado na nave da Abadia de Westminster, onde os reis e as rainhas da Inglaterra são coroados e sepultados. Junto a ele também estão Charles Darwin, por exemplo.

## 4. O Método das fluxões e fluentes de Newton

Dois dos problemas fundamentais do cálculo são o encontro da reta tangente a curva e a determinação de valores exatos para áreas de regiões limitadas por duas curvas. Esses problemas foram resolvidos por Isaac Newton.

Como dito na seção anterior, Newton escreveu suas descobertas em dois principais livros, o *De analysi per aequationes infinitas* (impresso em 1711) e o *The Method of Fluxions*, publicado por John Colson em 1736.

O tratado T*he Method of Fluxions* é composto por duas grandes partes. Na primeira, há uma tradução inglesa do manuscrito de Newton, e na segunda, Colson explica cada problema por meio de comentários. O manuscrito de Newton é dividido em três partes:

1. Newton apresenta e desenvolve a técnica das séries infinitas;

2. Introduz o conceito de fluxão; resolve problemas dos máximos e mínimos de uma dada curva; resolve o problema da tangente a uma curva em um ponto; entre outras questões;

3. Trata do cálculo de áreas das regiões planas de uma curva e da medida do comprimento de uma curva.

Newton então introduz a segunda parte da seguinte forma:

> Agora resta que, para uma ilustração da Arte Analítica, forneça algumas amostras de problemas, especialmente como a natureza das curvas. Mas, primeiro, pode-se observar que todas as dificuldades destes tipos podem ser reduzidas apenas a esses dois problemas que proponho, a respeito do espaço descrito por qualquer movimento local, por mais acelerado ou retardado que seja. (NEWTON, 1736, p. 19, tradução de Jorge Luiz de Almeida e Fumikazu Saito)

A partir desse momento então, Newton propõe mostrar que os estudos de curvaturas e quadraturas que vinham sendo desenvolvemos por meio de séries infinitas poderiam ser resolvidos de uma forma mais simples, reduzidos a dois problemas do movimento local, que são eles:

1. Dada a distância do espaço continuamente (isto é, em qualquer tempo), encontrar a velocidade do movimento em qualquer tempo indicado;

2. Dada a velocidade do movimento continuamente, encontrar o comprimento do espaço descrito em qualquer tempo indicado

É com esses dois problemas que Newton introduz o conceito de fluxões. O primeiro propõe encontrar a fluxão de uma dada quantidade, ou seja, a derivada de uma função. Já o segundo é o inverso, o método das fluxões, em que ele propõe determinar o fluente a partir da fluxão, ou seja, encontrar a primitiva de determinada função. Uma observação importante a se fazer é que derivada e integral não são termos que ele usava, mas sim foram desenvolvidos depois por Leibniz e seus "seguidores"/ amigos.

Assim, no primeiro Problema, Newton estabelece que os fluentes são quantidade que sofrem variações de acordo com seu movimento ou fluxo. Logo, as fluxões são as velocidades que são adquiridas por um corpo através de seu movimento. Assim, a relação entre fluentes e fluxões permite expressar a natureza de uma curvatura, com o ponto sendo representante de um corpo e a linha a representante de sua trajetória. Newton denominou as velocidades adquiridas através dos movimentos dos corpos de Fluxões.

Sendo assim, o Cálculo Diferencial está relacionado à descoberta da taxa de mudança de uma variável. Ou seja, para Newton, a fluxão de um fluente. Ele usa o termo fluente para determinar uma função e fluxão para determinar a derivada, denotada por (x com um ponto em cima).

Newton parte considerando duas variáveis que se relacionavam em uma equação (função). Newton imaginou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel P(x,y). À medida que P traça a curva, as coordenadas x e y variam continuamente com o tempo.

O passo seguinte foi encontrar as taxas de mudança de y e x em relação ao tempo, isto é, suas fluxões. Ele conseguiu isso considerando a diferença dos valores de x e y entre dois pontos próximos, dividindo essa diferença pelo intervalo de tempo transcorrido próximo de zero, tão pequeno a ponto de ser desprezível. Ou seja, Newton utilizou a ideia de limite, sem ter esse conceito consolidado na época.

Newton utiliza a seguinte notação em seu livro:

x = fluente

ẋ = fluxão do fluente

o = incremento infinitesimal do tempo

ẋo = momento (incremento infinitesimal do fluente)

O primeiro problema é dado na página 21 do livro. Em tradução livre, tem-se: A relação das Quantidades Fluentes dadas para determinar a relação de suas fluxões, cuja solução é dada:

1. Dada a equação, pela qual a relação dada é expressa, de acordo com as dimensões de uma das quantidades fluentes, suponha x, e multiplique seus termos por suas Progressões Aritméticas, e depois por (x ponto/x). Faça a operação separadamente para cada uma das quantidades fluentes. Então faça a soma de todos os produtos igual a zero e você terá a equação desejada. E então, ele nos dá o seguinte exemplo:

   Se a Relação das quantidades fluentes x e y é $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, primeiramente disponha os termos de acordo com x e então de acordo com y, e multiplique eles da seguinte maneira:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Multiplique | $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ | e | $- y^2 + axy - ax^2 + x^3$ |
| por | $\frac{3\dot{x}}{x}\ .\ \frac{2\dot{x}}{x}\ .\ \frac{\dot{x}}{x}\ .\ 0$ | e | $\frac{3\dot{y}}{y}\ .\ \frac{\dot{y}}{y}\ .\ 0\ .\ 0$ |
| tornando | $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y$ | e | $- 3\dot{y}y^2 - a\dot{y}x$ |

A soma dos produtos é $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 - a\dot{y}x = 0$, tal que a equação dá a relação entre as fluxões ẋ e ẏ . “

Logo, tem-se que as fluxões dos fluentes estão relacionadas na forma

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay}$$

Ou seja, as derivadas parciais em relação a x e a y, respectivamente.

Para explicar porque o método funciona, utiliza-se a seguir a função $y = x^2$ que possui resolução mais simples para encontrar sua fluxão, ou seja, sua derivada (em termos atuais):

A equação $y = x^2$ gera uma parábola quando representada por um gráfico no plano xy. Considere um pequeno espaço de tempo, denotado por Ɛ.

Durante o intervalo de tempo Ɛ, a coordenada x muda na quantidade $\dot{x}\varepsilon$, onde $\dot{x}$ é a taxa de mudança ou fluxão de x. Analogamente, y muda na quantidade $\dot{y}\varepsilon$.

Substituindo então x por $x + \dot{x}\varepsilon$ e y por $y + \dot{y}\varepsilon$ na equação $y = x^2$, tem-se:

$$y + \dot{y}\varepsilon = (x + \dot{x}\varepsilon)^2$$
$$y + \dot{y}\varepsilon = x^2 + 2x\dot{x}\varepsilon + (\dot{x}\varepsilon)^2$$

Mas como y pode ser cancelado com $x^2$ ( pois $y = x^2$ ), segue que:

$$\dot{y}\varepsilon = 2x\dot{x}\varepsilon + (\dot{x}\varepsilon)^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por Ɛ, resulta em:

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\varepsilon$$

Como o intervalo de tempo é desprezível (tão pequeno quanto se queira), Ɛ = 0, deixando:

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

Essas são as relações entre as fluxões e os fluentes de x e y, ou seja, as derivadas parciais em relação a x e a y. Isso é também a taxa de mudança das variáveis x e y, como uma considerada como uma função do tempo.

Ao dividir a fluxão de y pela de x, encontra-se a taxa de variação de y em relação a x ($\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$) que é a inclinação da reta tangente para uma curva no ponto P(x,y). Nesse caso, tem-se

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

Passando agora para o exemplo dado por Newton: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$

Buscando obter a relação entre as fluxões ẏ e ẋ, vamos considerar que as coordenadas x e y mudam durante o tempo Ɛ com a quantidade ẋƐ e ẏƐ. Então temos que x passará a ser $x + \dot{x}\varepsilon$ e y será $y + \dot{y}\varepsilon$ .

Então, substituindo na equação, tem-se:

$$(x + \dot{x}\varepsilon)^3 - a(x + \dot{x}\varepsilon)^2 + a(x + \dot{x}\varepsilon)(y + \dot{y}\varepsilon) - (y + \dot{y}\varepsilon)^3 = 0$$

$$x^3 + 3x^2(\dot{x}\varepsilon) + 3x(\dot{x}\varepsilon)^2 + (\dot{x}\varepsilon)^3 - ax^2 - 2ax(\dot{x}\varepsilon) - a(\dot{x}\varepsilon)^2 + axy + ay(\dot{x}\varepsilon) +$$
$$a(\dot{x}\varepsilon)(\dot{y}\varepsilon) + ax(\dot{y}\varepsilon) - y^3 - 3y^2(\dot{y}\varepsilon) - 3y(\dot{y}\varepsilon)^2 - (\dot{y}\varepsilon)^3 = 0$$

Usando que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ e reagrupando os termos, tem–se:

$$3x^2(\dot{x}\varepsilon) + 3x(\dot{x}\varepsilon)^2 + (\dot{x}\varepsilon)^3 - 2ax(\dot{x}\varepsilon) - a(\dot{x}\varepsilon)^2 + ay(\dot{x}\varepsilon) +$$
$$a(\dot{x}\varepsilon)(\dot{y}\varepsilon) + ax(\dot{y}\varepsilon) - 3y^2(\dot{y}\varepsilon) - 3y(\dot{y}\varepsilon)^2 - (\dot{y}\varepsilon)^3 = 0$$

Newton postulou que é possível, em qualquer problema, desprezar os termos que aparecem multiplicados por potências de Ɛ maiores ou iguais a 2 e obter assim uma equação envolvendo as coordenadas x e y do ponto gerador da curva e suas fluxões ẋ e ẏ. Ele despreza os termos sem nenhuma justificativa, simplesmente porque sabe intuitivamente que são termos infinitamente pequenos, ainda menores que os outros. Assim, resulta:

$$3x^2(\dot{x}\varepsilon) - 2ax(\dot{x}\varepsilon) + ay(\dot{x}\varepsilon) + ax(\dot{y}\varepsilon) - 3y^2(\dot{y}\varepsilon) = 0$$

Dividindo todos os membros por Ɛ:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

É possível reescrever a equação como:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Ou seja, a inclinação da reta tangente à curva.

Se verificarmos de maneira atual o que Newton fez em seu método dos fluentes, veremos que é a mesma coisa que fazer a derivação implícita de uma função y(x) obtida como curva de nível da superfície z = f (x, y) em z = 0 . Assim, dado o exemplo tratado, tome:

$$f(x, y) = x^3 + ax^2 + axy - y^3 = 0$$

f é uma função diferenciável com derivadas parciais

$$f_x = 3x^2 - 2ax + ay \text{ e } f_y = ax - 3y^2$$

Derivando implicitamente f(x,y(x)) com respeito a x, obtemos:

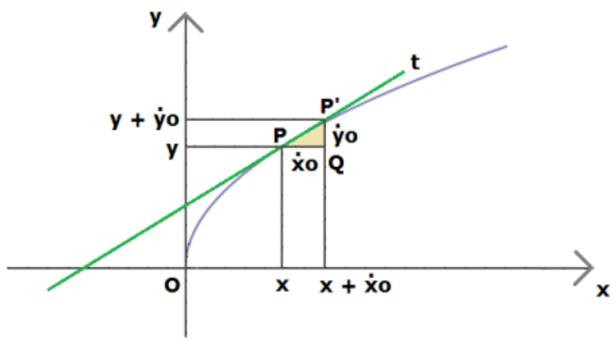
$$\frac{d}{dx}f(x, y(x)) = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0$$

E então:

$$-\frac{f_x}{f_y} = \frac{3x^2-2ax+ay}{3y^2-ax} = \frac{dy}{dx}$$

Para uma visualização gráfica, considere a imagem abaixo:

**Imagem 1: Representação da trajetória de um objeto qualquer.**




*Fonte [6]*

O gráfico representa o movimento de uma partícula. Supondo que os pontos P(x,y) e P'$(x + \dot{x}o,\ y + \dot{y}o)$ ($o$ tem o mesmo significado de Ɛ) são as posições da partícula no tempo inicial e inicial adicionado do incremento $o$, tem-se que a reta PP' se aproxima cada vez mais da reta tangente ao ponto P à medida que o incremento $o$ diminui, ou seja, quando $o \to 0$, a inclinação de PP' será $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, coincidindo com $\frac{dy}{dx}$.

Assim, no livro Newton explica de maneira geral esse método e percebe que fazer todas essas contas é o mesmo que multiplicar cada termo x por $\frac{\dot{x}}{x}$e o número da potência que o acompanha, para derivar em relação a x, com o processo sendo análogo para derivar em relação a y.

No segundo problema, Newton considera o inverso do problema 1: dado uma fluxão, qual seria seu fluente? Ou seja, em termos atuais, dada uma derivada, como encontrar sua primitiva?

Casos simples podem ser obtidos por "palpites", como no exemplo da parábola: dada a fluxão $\dot{y} = 2x\dot{x}$, encontrar o fluente y. Uma resposta óbvia é $y = x^2$. Mas $y = x^2 + 1$ também é verdadeira, assim como $y = x^2 + 2$ e, no geral, $y = x^2 + C$, onde C é qualquer constante. A razão para isso é que os gráficos de todas essas funções são obtidas a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se verticalmente pelo eixo y, resultando que todos os gráficos possuem tangentes com mesma inclinação em um mesmo ponto x.

Newton introduz o problema 2 da seguinte forma:

Uma equação proposta, incluindo as fluxões de suas quantidades, determinar a relação entre as quantidades.

Uma solução particular:

1. Como esse problema é o contrário do anterior, deve ser resolvido procedendo-se de maneira contrária. Isto é, os termos multiplicados por $\dot{x}$ estando dispostos de acordo com as dimensões de x (potências de x), devem ser divididos por $\frac{\dot{x}}{x}$, e depois pelo número de sua dimensão (ou seja, número da potência), ou talvez alguma outra progressão aritmética. Então o mesmo trabalho deve ser repetido com os termos multiplicados por $\dot{y}$, e a soma resultante deve ser igual a zero, rejeitando os termos redundante, ou seja, repetidos." (tradução livre)

E continua utilizando como exemplo a equação:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

A operação segue da seguinte maneira:

| | |
|---|---|
| Divida | $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}$ |
| por $\frac{\dot{x}}{x}$ resultando | $3x^3 - 2ax^2 + ayx$ |
| Divida por | 3 2 1 |
| resultando em | $x^3 - ax^2 + ayx$ |

Analogamente:

| | |
|---|---|
| Divida | $-\ 3y^2\dot{y}\ +\ ax\dot{y}$ |
| por $\frac{\dot{y}}{y}$ resultando | $-\ 3y^3\ +\ axy$ |
| Divida por | 3 1 |
| resultando em | $-\ y^3\ +\ axy$ |

Newton continua em seu livro dizendo que "Assim, a soma $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$será a relação entre as quantidades x e y. Observe que apesar do termo axy aparecer duas vezes, não o coloquei duas vezes na soma, rejeitando o termo redundante. Então, quando um termo aparecer duas vezes, ele deve ser escrito somente uma vez na soma dos termos."

Newton também explicita que nem todo problema pode ser resolvido dessa maneira, mas, se após encontrar a equação do problema 2 aplicar-se o método do problema 1 e chegar na equação derivada original, então a equação encontrada (ou seja, a primitiva) é correta.

O matemático também fez mais do que apenas fornecer regras para a diferenciação e a integração. Fermat, em suas pesquisas sobre encontrar áreas sob curvas, descobriu que a área sob a curva $y = x^n$ de $x = 0$ até $x > 0$, é dada pela expressão $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ que é a mesma expressão que surge da antidiferenciação (ou integração) de $y = x^n$ .

Newton reconheceu que esta conexão entre a área e a antidiferenciação não era coincidência. Em outras palavras, ele percebeu que os dois problemas fundamentais do Cálculo eram problemas inversos, ou seja, o problema da tangente e o problema da área. Este é o ponto principal do Cálculo Diferencial e Integral.

Dada uma função y=f(x), podemos definir uma nova função A(t), que representa a área sob o gráfico de f(x), de um valor fixo x=a a algum valor variável x=t . Vamos chamar essa nova função de função de área da função original.

Se o valor de x=t varia para direita ou para esquerda, a área sob o gráfico também varia, justamente porque A(t) é uma função de t. Newton percebeu que a taxa de mudança da função de área A(t), em um ponto x=t é igual ao valor da função original nesse ponto. Em outras palavras, a derivada de A(t) é igual a f(t), o que, por sua vez, significa que A(t) é a antiderivada de f(t) (ou primitiva de f(t)).

Para encontrarmos a área sob uma certa curva f(x), deveremos encontrar a antiderivada de f(x), e é dessa forma que os dois processos (encontrar a área sob a curva e encontrar a derivada) são opostos.

Assim, após explicar o método, os dez problemas subsequentes que Newton traz em seu livro tratam de sua aplicação ao estudo de curvaturas, como determinar os máximos e mínimos, traçar a tangente e retificar curvas e quadraturas de curvas.

Para determinar os pontos máximo e o mínimo de uma curva, Newton percebe que esses pontos são aqueles em que a reta tangente possui inclinação igual a zero, pois se em determinado ponto da curva a reta tangente é crescente, quer dizer que há outro ponto mais a frente em que sua coordenada y será maior que no ponto anterior (se estivermos falando de uma curva no plano xy). Analogamente, se em um ponto da curva a reta tangente é decrescente, isso implica que em algum ponto mais adiante da curva, sua coordenada y será ainda menor que no ponto anterior.

Para uma demonstração do Teorema de Fermat (como é chamada essa dedução feita por Newton que ele utiliza para encontrar os máximos e mínimos), tem-se o seguinte:

Teorema de Fermat: Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se f'(c) existir, então f'(c)=0.

Demonstração[2]:

Suponha que f tenha um máximo local em c. Então, tem-se que $f(c) \geq f(x)$ se x for suficientemente próximo de c (ou seja, se escolhermos um x tal que $x \in [a, b]$ em que c é o máximo local de [a,b]). Logo, se h for suficientemente próximo de 0, com h sendo positivo ou negativo, então:

$$f(c) \geq f(c+h) \Rightarrow f(c+h) - f(c) \leq 0.$$

Podemos dividir ambos os lados da desigualdade $f(c+h) - f(c) \leq 0$ por um número positivo. Assim, se h > 0 e h suficientemente pequeno, tem-se:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade, obtemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Mas, uma vez que f'(c) existe, tem-se:

[2] Essa demonstração foi retirada do livro Cálculo volume 1, 7ª edição de James Stewart.

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Portanto, $f'(c) \leq 0$.

Analogamente, fazemos o mesmo processo considerando h < 0 e suficientemente pequeno e obtemos que $f'(c) \geq 0$. Mas , se $0 \leq f'(c) \leq 0$, então $f'(c) = 0$, como queríamos demonstrar.

## 5. O Teorema Fundamental do Cálculo

Uma parte fundamental do Cálculo, de sua história e da guerra que sucedeu sua criação, o Teorema Fundamental do cálculo é considerado um dos resultados mais importantes de toda a matemática. Sua concepção antecede à data atribuída a criação do Cálculo, visto que foi primeiramente demonstrado por James Gregory (1638–1675), mesmo que não em sua completude.

Há um consenso de que a existência do Cálculo como uma unidade depende deste teorema. Sendo assim, muitos trabalhos anteriores às descobertas de Gregory, Barrow, Newton e Leibniz, como por exemplo o método de encontrar retas tangentes à uma curva de Pierre de Fermat (1607-1665), não eram vistos à época como resultados de Cálculo, mesmo que essa seja a ideia que temos sobre estes hoje em dia.

O teorema em si consiste de dois resultados que relacionam os conceitos de derivada, primitiva e integração:

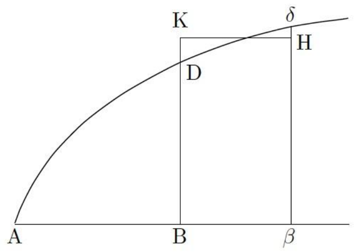
$$F(x) := \int_a^x f \Rightarrow F'(c) = f(c) \,\forall\, c \in [a, b]$$

$$g' = f \Rightarrow \int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Note que os resultados requerem que f(x) seja contínua em c e integrável em [a, b], e também é importante ressaltar que F e g não são necessariamente a mesma função. A função definida no primeiro resultado (F(x)) é uma dentre a classe infinita de funções que podem operar como g(x) no segundo resultado.

Finalmente, é interessante notar que a forma atual do teorema e a demonstração vista nos livros didáticos de hoje em dia usam de conhecimentos posteriores às primeiras demonstrações dele. Logo, é interessante analisarmos a demonstração dada por Newton, que não utiliza essas ferramentas, para compreender o raciocínio por trás do desenvolvimento do Cálculo na época:

**Imagem 2: Configuração geométrica para prova à seguir**




*Fonte: Mathematical Association of America*[16]

Newton considerou a curva $AD\delta$ (veja imagem acima) e definiu:

$$x := AB$$
$$y := BD$$
$$z := S(ABD)$$

Ele definiu $o := B\beta$ como um segmento de reta infinitesimal e definiu $v := BK$ de tal forma que:

$$vo = S(B\beta HK) = S(B\beta\delta D) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A\beta = AB + B\beta = x + o$$

E deste resultado segue que:

$$S(A\delta\beta) = S(ADB) + S(BD\delta\beta) = z + S(B\beta HK) = z + ov$$

Se o incremento na àrea $(dz)$, $S(BD\delta\beta)$, for dividido pelo incremento do eixo x, o, teremos v

Como o é infinitamente pequeno, podemos assumi-lo como sendo 0 (Postulado de L'hôpital) o que faria com que os pontos B e β fossem os mesmos, e logo $o = v$, levando à:

$$\frac{dz}{dx} = y$$

## 6. A História de vida de Gottfried Wilhelm Leibniz[3]

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em 1646 em Leipzig, na Alemanha, durante o período da Guerra dos Trinta Anos. Nesse momento sua cidade natal estivera no coração do conflito e segundo estimativas, cerca de ⅓ de todas as casas na Alemanha estavam destruídas quando a guerra acabou em 1648.

Leibniz era filho de Friedrich Leibniz, professor de ética e vice-presidente da faculdade de filosofia da universidade de Leipzig, e Catarina Schmuck, filha de um advogado em Leipzig. O pai de Leibniz morreu quando este tinha 6 anos de idade, e deixou a ele uma biblioteca, que teve acesso aos 8 anos, sendo autorizado a ler todos os livros que havia no acervo pessoal em seus momentos de lazer.

Na escola, Leibniz se destacou ao aprender a lógica de Aristóteles, mas sua educação matemática foi escassa. Assim, seguiu os caminhos de seu pai, estudando filosofia acadêmica e leis na Universidade de Leipzig e defendeu sua tese de mestrado, "Sobre o princípio do indivíduo", aos 17 anos.

Já no início da década de 1670, quase aos 30 anos, Leibniz começou a estudar e se interessar por matemática. O estudo começou quando teve a ideia de criar um sistema universal que iria fornecer um modo de representar as relações feitas na matemática, um alfabeto do pensamento humano com o qual ideias, não importava quão complicadas, poderiam ser representadas e analisadas por decomposição em suas partes componentes, como letras que compõem palavras e sentenças. A ideia desse alfabeto (characteristica universalis) foi apresentado pela primeira vez em sua tese de doutorado (Dissertação sobre a arte combinatória), e foi essa tentativa de encontrar um alfabeto para o pensamento humano que o levou ao que viria ser hoje em dia o cálculo, isso porque este é um conjunto de conhecimentos que trata da análise de geometria e números, e para Leibniz este era um exemplo de sistema lógico maior para analisar toda sua characteristica universalis.

Entretanto, em 1666, o grau de doutor foi negado a ele pela Universidade de Leipzig. Não se sabe exatamente o motivo, apesar de alguns dizerem que foi por motivos pessoais da esposa do reitor e outros falarem que foi devido a alguma politicagem acadêmica na universidade, pois havia um número reduzido de vagas para pós-graduação e, se a tese de Leibniz fosse aceita, teria impedido que um estudante mais antigo fosse graduado. Assim, em outubro do mesmo ano, Leibniz então se matriculou na Universidade de Altdorf, onde recebeu o grau de doutor por sua tese "sobre casos difíceis [nas leis]" em 1667. Também em 1667, o estudioso conheceu um estadista alemão rico e bem-relacionado, o barão Johann Boineburg tornando seu amigo íntimo, servindo de secretário, assistente, consultor, bibliotecário e advogado por anos. Depois, Leibniz conheceu o arcebispo-eleitor de Mogúncia Johann Schönborn, que o fez juiz da Cortes Superior de Apelações aos 24 anos. Foi através de seu relacionamento com Boineburg que Leibniz foi enviado a Paris em 1672, uma tentativa de fazer com que Luiz XIV não invadisse os Países Baixos e entrasse em guerra. Apesar dele não ter conseguido ser efetivo em sua missão, foi o período que adquiriu seu conhecimento matemático. E neste mesmo ano Boineburg veio a falecer, quando Leibniz tornou-se tutor de seu filho, mas os dois não se deram bem e então acabou sendo despedido de seu emprego em 13 de setembro de 1674.

Leibniz, então, se manteve em Paris aprendendo francês e depois aprendendo coisas em bibliotecas, além de ter prestado alguns serviços jurídicos e ações em favor dos ricos, já que era advogado. Vale o ressalto que Paris era a capital intelectual da Europa, e que em 1672 começou seu caminho rumo à descoberta do cálculo, quando conheceu Christian Huygens, físico e matemático holandês, que mais tarde se tornou “tutor” de Leibniz. Huygens deu um problema de séries infinitas de frações cada vez menores que a anterior (1+ ⅓ + ⅙ + 1/15 + …) e Leibniz conseguiu achar a solução. Assim, alguns livros foram sugeridos por ele para Leibniz, sendo um deles o Arithmetica Infinitorum, de John Wallis, e outro livro foi um escrito pelo matemático Gregory St. Vicent, com um trabalho que antecipava o cálculo integral, que imaginava uma área geométrica como sendo a soma de um número infinito de retângulos infinitamente delgados. Além destes, outras leituras feitas por Gottfried foram Cavalieri e suas ideias de que um sólido era formado por uma infinidade de superfícies. Assim, em seus 4 anos e meio que passou em Paris, Leibniz se tornou um grande matemático.

Em 1673, durante uma viagem diplomática a Londres, conseguiu se encontrar com membros da Royal Society, como Robert Boyle e Robert Hooke, e, nesta oportunidade, apresentou-lhes sua invenção incompleta de uma máquina de calcular. Porém, poucos dias depois, Hooke atacou Leibniz em público fazendo comentários ruins sobre a máquina e prometendo construir sua própria calculadora, muito superior e que funcionava, a qual mostraria à sociedade. Entretanto, apesar dos ataques, Leibniz foi aceito na Royal Society em 19 de abril de 1673.

Já ao fim do mesmo ano, Leibniz havia desenvolvido um método para usar uma série de números racionais a fim de encontrar a solução do problema da quadratura do círculo. Também, como uma de suas contribuições matemáticas, ele percebeu que o trabalho de Blaise Pascal sobre indivisíveis e infinitesimais podia ser combinado com a regra para a tangente de Sluse (que havia estabelecido uma regra para se construir tangentes a um ponto de uma curva) e aplicado a qualquer curva geométrica, e não apenas ao círculo. E foi isso o que o levou ao cálculo.

Nesta época também, entre 1673 e 1676 Leibniz tentou permanecer em Paris e arranjar outros empregos e cargos, mas se viu obrigado a aceitar a proposta do duque Johann Friedrich Hannover. Conseguiu prolongar um pouco sua estadia em Paris, e aprimorou sua invenção de calculadora, que podia multiplicar um número com dez dígitos por um com 4 dígitos, com apenas quatro voltas da manivela. Além disso, em 1673, recebeu uma longa carta de Oldenburg, editor fundador das Philosophical Transactions, ajudado por John Collins, detalhando a situação matemática na Grã-Bretanha (incluindo o trabalho de Newton), mas de formas extremamente vagas, tão vagas que Leibniz acreditou que suas descobertas fossem inteiramente originais e Newton tivesse conseguido resolver alguns problemas que envolvesse o cálculo, mas não tivesse inventado o método.

Já em 1674, Leibniz chegou independentemente no mesmo ponto em que Newton havia alcançado no cálculo alguns anos antes e, em 1675, se iniciou uma troca de cartas envolvendo Leibniz, Oldenburg, Collins, e finalmente Newton, durante os dois últimos anos que Leibniz passou em Paris. Eles trocaram informações vagas no geral sobre problemas envolvendo o cálculo, e foi nesse período que Leibniz teve conhecimento que Newton possuía métodos gerais para todas as curvas geométricas, pelas quais podiam determinar áreas de superfícies, volumes e outras funções relacionadas com curvas, tais como tangentes.

No ano seguinte, 1675, Gottfried desenvolveu o cálculo diferencial e escreveu notas e artigos contendo a essência do cálculo. Além da criação dos símbolos usados no cálculo diferencial e integral como conhecemos hoje, como por exemplo o símbolo da integração, visto por ele como uma soma.

Sua partida de Paris se deu em 4 de outubro de 1676 com destino a Hanover, onde o duque o esperava. No caminho, parou em Londres e encontrou-se com Collins, e pode examinar o De Analysi de Newton, do qual tomou algumas notas, o que iria se tornar o tema das acusações contra ele sobre plágio durante a Guerra entre ele e Newton. A tomada de notas dele em relação a obra de Newton não tira a certeza atual de que os dois fizeram seu trabalho independentemente, isso porque as anotações feitas não foram realmente sobre a formulação do cálculo, mas sim sobre outras coisas que o livro contém. Além disso, a documentação do desenvolvimento do cálculo existente nas notas de Leibniz datam outubro de 1675, ou seja, muitos meses antes que ele tivesse contato com o trabalho de Newton.

Alguns anos depois, em 1684, publica-se na Acta Eruditorum, a primeira revista científica editada na Alemanha, o artigo “Novo método para máximos e mínimos”, feito por

Leibniz, no qual deriva a lei dos senos de Snell. Talvez se houvesse alguma contextualização histórica e um agradecimento a Newton tivesse sido feito nesse artigo, mencionando a troca de carta entre eles, a briga poderia não ter acontecido. Uma vez que foi a partir dessa publicação que o matemático começou a ser reconhecido como o inventor do cálculo.

Em 1686, Leibniz publicou seu segundo artigo sobre cálculo na Acta, intitulado "Sobre a geometria recôndita e  a análise dos indivisíveis e das infinidades", e falava sobre aquilo que ele pensava como sendo o inverso da diferenciação, a integração. Importante mencionar que nunca se pretendeu chamar a "geometria recôndita" de cálculo integral, mas esse termo "integral" aparece em um artigo de um dos irmãos Bernoulli em 1690 e "cálculo integral" aparece num artigo escrito por Johann Bernoulli e Leibniz em 1698.

Em 1701, publicou o artigo "Ensaio sobre uma nova ciência dos números" em que descrevia uma nova ciência dos números denominada "matemática binária"  que ele havia desenvolvido em 1679. E vale o destaque que Leibniz acreditava que os números binários iriam revelar propriedades dos números comuns (inteiros) que não seriam aparentes de outra forma (quem de fato, se tornaram a base dos sistemas de circuitos eletrônicos).

Também, como um grande adepto das sociedades acadêmicas, desde 1697 tinha planos de fundar a Sociedade de Ciências de Berlim. Entretanto, esses planos foram perturbados e atrasados por anos. Entretanto, a sociedade foi finalmente inaugurada em 19 de janeiro de 1711, mas Leibniz não estava lá por conta de seus afazeres em Hanover. Além disso, em abril, seu salário foi abruptamente reduzido à metade, e quando morreu, um ano e meio mais tarde, a academia nada fez em sinal de pesar pelo falecimento de seu fundador.

Sua morte aconteceu em 14 de novembro de 1716 em Hanover, após anos de uma série de brigas e discussões com os apoiadores de Newton sobre o cálculo. Foi sepultado dentro da Igreja de Neustädter, mas houve pouca atenção e gente presente em seu funeral. Além disso, a Royal Society não deu atenção à sua morte, embora fosse um de seus membros.

## 7. O cálculo de Leibniz

O cálculo desenvolvido por Leibniz tem grande destaque até hoje, uma vez que suas ideias e notações continuam sendo utilizadas. Mas primeiro, é importante atentar-se a algumas definições feitas por ele.

O matemático define a "derivada" como as somas, enquanto que as "integrais" representam as diferenças, sendo estas denotadas por "$d$" e "∫", respectivamente. Assim, para exprimir as diferenciais do eixo y, por exemplo, utilizava-se de "$dy$", já quando queria referir-se ao eixo x, "$dx$", e assim por diante.

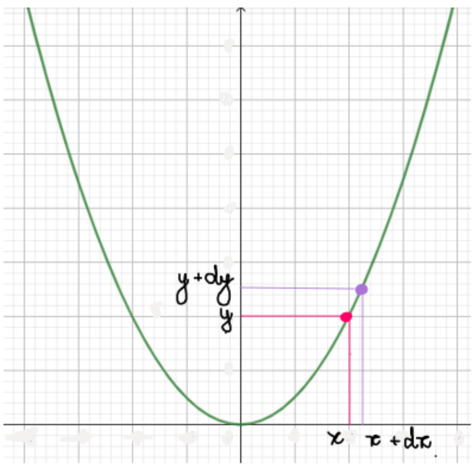
Vale ressaltar também que a diferencial de uma variável é a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos dela, ou seja, são ordenadas situadas infinitamente próximas. Então, "$dx$" seria a diferença infinitamente pequena entre duas abscissas do eixo x e, analogamente, "$dy$" seria a diferença infinitamente pequena entre duas ordenadas y consecutivas.

Porém, vale destacar que nesta época ainda não havia o conceito de limite, logo, para que as diferenciais se tornassem infinitésimos sem utilizar limites, houve o abandono das diferenciais de ordem superior quando confrontadas com diferenciais de ordem mais baixas.

Dado isso, vamos agora considerar a ideia inicial de Leibniz:

Considere uma curva y tal que $y = \frac{1}{2}x^2$. Então,

**Imagem 3: Representação gráfica da variação de um ponto a outro.**




*Fonte: autoral utilizando-se do GeoGebra.*

Assim, como visto na representação acima, dado dois pontos consecutivos na curva, onde suas coordenadas sejam respectivamente (x,y) e (x+dx, y+dy), sendo $dx$ seria a diferença infinitamente pequena entre duas abscissas do eixo x e, analogamente, $dy$ seria a diferença infinitamente pequena entre duas ordenadas y consecutivas, como já havia sido mencionado anteriormente.

Logo, pode-se notar que:

$$dy = dy + y - y$$
$$dy = (dy + y) - y$$
$$dy = \frac{1}{2}(x + dx)^2 - \frac{1}{2}x^2$$
$$dy = \frac{1}{2}(x^2 + 2xdx + dx^2) - \frac{1}{2}x^2$$
$$dy = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}2xdx + \frac{1}{2}dx^2 - \frac{1}{2}x^2$$

Mas como $dx$ é infinitamente pequeno, e está ao quadrado, podemos considerar esse último termo da equação acima como desprezível em relação aos outros termos. Assim, resulta-se em:

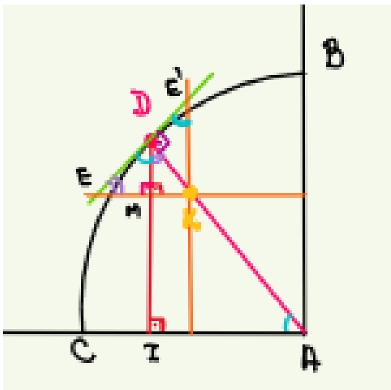
$$dy = xdx$$
$$\frac{dy}{dx} = x$$

Logo, por meio desse exemplo, é possível perceber que a primeira ideia de Leibniz tinha como resultado a razão entre dois valores não atribuíveis, resultando em um valor atribuível.

Porém, esse método não foi aceito por muitos da época pois trazia a ideia de que a relação entre $dx$ e $dy$ era uma divisão. O matemático provou sua demonstração para essa comparação entre as variáveis com o Triângulo de Pascal.

O entendimento de toda a demonstração que será feita abaixo conta com o auxílio do seguinte desenho:

**Imagem 4: Representação da reta tangente a um ponto na semicircunferência e construções feitas por Leibniz**




*Fonte: autoral.*

Essa demonstração teve seu raciocínio baseado em uma semicircunferência, mas depois foi provado que a mesma se estendia para uma curva genérica, seguindo as mesmas ideias e princípios.

Assim, considere uma semicircunferência, tal que o ângulo formado entre o eixo das abscissas e das ordenadas seja de 90°, nomeando os pontos extremos B e A e o centro da circunferência como A. Logo após, escolha um raio qualquer da circunferência, e trace o raio referente a esse ponto. Ainda neste ponto trace também a reta tangente a curva que passa por este ponto.

Com isso, escolha um ponto genérico K no raio da circunferência (semi reta AD), a partir dele, traçar duas retas passando por este mesmo ponto, sendo uma delas paralela a AC e outra, paralela a AB, onde elas interceptam a reta tangente nos pontos E e E´, respectivamente.

Assim, trace novamente mais uma reta paralela a BA, agora passando pelo ponto D, e interceptando a reta AC em um ponto I, além de interceptar a reta KE no ponto M.

Com isso, já podem ser construídas as relações que queríamos a partir dos ângulos e triângulos formados na figura. Vamos analisar, primeiramente, o triângulo retângulo $\Delta DIA$, assim, como $\angle DIA$ é 90°, então vamos chamar o ângulo $\angle DAI = \beta$ e $\angle ADI = \gamma$. Portanto, tem-se então que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser 180°. Logo,

$90° + \beta + \gamma = 180°$

Portanto, com isso em mente, vamos analisar então agora, o $\Delta EDK$, sabe-se que o ângulo $\angle E'DE = 180°$, mas como a tangente é perpendicular ao raio no ponto D, então $\angle E'DK = 90°$, e $\angle KDI = \gamma$, logo, $\angle MDE = \beta$. Seguindo o mesmo raciocínio, para o $\Delta EMD$, como o $\angle$DME = 90° e $\angle$MDI = β, logo, $\angle$DEM = γ. Da mesma maneira ao analisarmos o ΔE´KE, como $\angle$E´KE = 90° e $\angle$DEM = γ, logo, $\angle$EE´K = β.

Dessa maneira, pode-se concluir que:

$$\angle EDI = \angle IAD$$
$$\angle DEK = \angle IDA$$
$$\angle EE'K = \angle IAD$$

Portanto, ΔDIA=ΔEKE´.

Assim, podemos concluir a relação:

$$\frac{E'K}{EK} = \frac{AI}{DI}$$

E, assim, tem-se que como K é arbitrário, ou seja, ele pode ser escolhido de forma a se aproximar muito de K, logo E´K e EK serão grandezas tão pequenas, que serão consideradas por ele como não atribuíveis. Mas a razão entre elas vai permanecer atribuível, pois será dada pela razão de AI/DI que está fixa. Logo, pela notação de Leibniz, E´K = dy e EK = dx, portanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{AI}{DI}$

Com isso, provou-se então o que Leibniz queria.

## 8. A Guerra do Cálculo

É importante dizer que se Newton ou Leibniz não tivessem descoberto o cálculo, outro alguém o teria feito, pois era inevitável, e isso não se fala isso para retirar o mérito do que os dois fizeram, mas porque vimos que historicamente as descobertas anteriores estavam se encaminhando para esta.

Leibniz e Newton se corresponderam pela primeira vez em 1676, a pedido de Oldenburg e Collins para Newton. O assunto principal dessa carta de 11 páginas era o teorema binomial, e é um catálogo dos resultados matemáticos de Newton. O inglês cita vagamente “certos métodos adicionais” que ele havia criado, mas não detalha nada. Newton estava sendo cauteloso por medo de revelar seus segredos. Assim, Leibniz nunca recebeu nada de Newton em relação ao cálculo. Assim, até onde sabia, Newton tinha um método de resolver um problema e ele (Leibniz) tinha outro, coisa que Newton também parecia acreditar. Mas apesar de Leibniz ter ficado muito feliz com a troca de cartas, houve uma confusão de datas com a carta como resposta de Leibniz para Newton, e isso deixou Newton ainda mais receoso e desconfortável, e a suposta demora da resposta também foi utilizada como uma possível prova durante a Guerra do Cálculo pelos opositores de Leibniz, acusando de que ele teve muito tempo para que pudesse fazer uma análise minuciosa da carta que recebera antes de mandar sua carta.

A resposta de Newton em relação à carta se deu em 1776, mas só chegou até Leibniz em Hanover em 1777, e apesar de tecer elogios a Leibniz, era fria e não tinha interesse em manter correspondência. Além disso, pode-se notar que quando revelava uma informação importante sobre o cálculo, o fazia em código, o qual Leibniz não conseguia decifrar. Após uma resposta de Newton a essa carta, em 11 de junho de 1677, Leibniz não recebeu mais nenhuma correspondência.

John Wallis, em seus livros de 1693 e 1695, dedicou páginas às contribuições de Newton e comparou seu método das fluxões com o método de Leibniz, e essa é uma parte importante da Guerra, porque ao ler sobre isso muitos leitores desses livros estavam se deparando pela primeira vez com a informação de que Newton havia desenvolvido um método idêntico ao de Leibniz, porém antes. Além disso, Wallis defendia que o trabalho de Newton era melhor que o de Leibniz, sendo esse quase um prólogo da guerra.

Muitos ficaram surpresos com essa afirmação, já que os artigos de Leibniz já eram muito divulgados por toda a Europa e ele nunca havia citado Newton em relação à sua descoberta, além de não haver nenhuma publicação de Newton sobre isso em qualquer lugar.

Já o matemático Johann Bernoulli tomou o lado de Leibniz e fez críticas à Wallis por sugerir a possibilidade de plágio, assim como Leibniz. Porém, como Newton ficava em silêncio em relação à autoria do cálculo, Leibniz achava que Newton o reconhecia como o autor do método. Além disso, nessa década de 1690, Leibniz estava em seu auge, e se houvesse decidido atacar Newton, teria vencido a guerra, entretanto, o estudioso alemão não tinha essa intenção. Assim, ele até escreveu uma carta a Newton em 1693, tecendo elogios, a qual Newton respondeu também com elogios e de forma amigável (o que não fazia muito sentido).

Em 1699, sem nenhum motivo aparente, Fatio de Duillier reapareceu subitamente quando decidiu principiar a luta a favor de Newton sobre o cálculo, escrevendo o artigo “Uma investigação geométrica de duas partes sobre a linha de queda mais curta”, no qual fez uma acusação pública de que Leibniz teria roubado o método do cálculo de Newton, quem, segundo ele, havia descoberto primeiro. Não se sabe ao certo porque fez isso, mas alguns acreditam que foi uma tentativa de reaproximação dele com Newton, enquanto outros acreditam que tenha sido para atacar diretamente Leibniz, já que Fatio era ressentido em relação a ele.

Já no ano seguinte, em 1700, Leibniz publica sua resposta ao matemático, defendendo sua honra e menosprezando o jovem, insinuando que Fatio não tinha nem mesmo apoio de Newton nessa acusação e afirmando explicitamente sua inocência. Além de escrever esse artigo em sua revista favorita, Leibniz também fez uma crítica anonimamente sendo favorável a si próprio. Enquanto Newton permaneceu calado sobre a questão.

A segunda vez em que os ânimos se agitaram foi por conta de um personagem chamado George Cheyne, que escreveu o livro intitulado "Sobre o método inverso das fluxões" no qual tentou explicar o cálculo newtoniano.

A inclusão do pequeno tratado de Newton em Óptica, em 1704, marcou o início silencioso das guerras do cálculo, isso porque Leibniz já havia praticamente se consolidado como inventor do cálculo (inclusive foi ele que deu esse nome à invenção). Newton incluiu, na seção de apêndices do livro, seu texto sobre cálculo "Sobre a quadratura das curvas" porque Cheyne entendeu tão errado o cálculo de Newton que esse fez questão de explicar seu método.

Em 1705, uma resenha anônima do apêndice matemático de Newton apareceu no jornal europeu a que Leibniz era intimamente ligado, e foi essa matéria que realmente iniciou a guerra, pois Newton e seus seguidores interpretaram como uma insinuação de que o inglês havia roubado as ideias de Leibniz. Esse texto anônimo foi provado posteriormente ser de autoria de Leibniz. Nessa resenha ele insinuava sutilmente que Newton havia tomado dele o cálculo.

Alguns anos depois, em 1708, um professor de Oxford chamado John Keill procurou assegurar que os créditos em relação ao cálculo deveriam ser de Newton, e somente de Newton, acusando Leibniz de plágio em um artigo na Philosophical Transactions da Royal Society.

Assim, em 1711, Leibniz enviou uma carta ao secretário da Royal Society queixando-se da maneira como havia sido tratado por Keil, e dizia essencialmente que era inocente e que "Ninguém saberia melhor que Newton que esta acusação é falsa". Leibniz queria que Keill fizesse uma retratação pública, mas não foi isso que aconteceu, e Keill basicamente defendeu-se da acusação de calúnia e levou a julgamento sua acusação contra Leibniz na Royal Society.

Logo, em 29 de dezembro do mesmo ano, Leibniz escreveu novamente ao secretário da Royal Society pedindo reparação em relação às acusações de Keill, apelando à sociedade e à Newton, o qual acreditava que iria apoiá-lo, mas estava errado. Leibniz não sabia que em 1711, Newton e Keill estavam discutindo suas acusações, e que Keill tinha enviado a Newton uma cópia da resenha anônima que ele havia publicado em 1705 sobre o livro de Newton “De quadratura curvarum”, na qual insinua sutilmente que o inglês havia adaptado o cálculo dele.

Com isso, Newton escreveu dizendo que a disputa entre Keill e Leibniz não o envolvia. Assim, em 6 de março de 1712, a Royal Society nomeou um comitê para examinar o assunto, e, em 24 de abril de 1712, emitiu um relatório em que decidia em favor de Newton e condenou Leibniz, determinando assim que Newton inventara o cálculo e concluindo que Leibniz havia tido acesso a certos documentos de Newton enquanto esteve em Londres em 1673 e 1676. A Royal Society e Newton aceitaram o relatório como sendo correto e justo e pagaram por sua publicação. O relatório se espalhou por toda a Europa.

Novamente, em 29 de julho de 1713, Leibniz escreveu de forma anônima a “Charta Volans”, uma pequena folha impressa, em que se refere em terceira pessoa, e utilizou a carta como um veículo para atacar e zombar de Newton, se utilizando do argumento errado de que Newton tinha roubado dele a ideia do cálculo e argumentava que a principal razão da posição dos partidários do Newton era uma xenofobia. No início de 1714, cópias da carta estavam sendo distribuídas por toda a Europa. Leibniz também escreveu respostas anônimas em várias revistas sobre o ataque de Keil.

Por fim, em 1716, após intensas brigas entre Leibniz, seus seguidores, Keill e os seguidores de Keill, houve uma breve troca de cartas entre Leibniz e Newton numa tentativa de resolver essa disputa, que não levou a lugar nenhum. E, neste mesmo ano, houve o falecimento de Leibniz, levando ao fim da guerra do cálculo.

## 9. Referências


[1]KILHIAN, Kleber. O método das fluxões de Newton. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2022/09/o-metodo-das-fluxoes-de-newton.html>. Acesso em 06 de setembro de 2023.

[2]KILHIAN, Kleber. Algumas Observações Sobre a Notação de Derivada. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2013/02/algumas-observacoes-sobre-notacao-de.html>. Acesso em 06 de setembro de 2023.

[3]JÚNIOR, Jorge Luiz de Almeida Zeferino; SAITO, Fumikazu. Breve apontamento sobre The Method of fluxions and infinite series, de Isaac Newton. XIV SNHM, Uberaba, Minas Gerais, Brasil, 28 a 31 de março de 2021. Disponível em: <https://fumikazusaito.files.wordpress.com/2021/05/322199.pdf>. Acesso em 07 de setembro de 2023.

[4]NEWTON, Isaac, Sir (1642-1727); COLSON, John (1680-1760); ADAMS, John (1735-1826). The method of fluxions and infinite series : with its application to the geometry of curve-lines. Printed by Henry Woodfall; and sold by John Nourse at the Lamb without Temple-Bar, MDCCXXXVI [1736]. Disponível em: <https://archive.org/details/methodoffluxions00newt/page/n3/mode/2up>. Acesso em 06 de setembro de 2023.

[5]PANZA, Marco. Das velocidades às fluxões.scientiæ zudia, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 509-46, 2010. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ss/a/kHR8fTDcVDh8PWrM6PnTMPz/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em 08 de setembro de 2023.

[6]SILVA, Warley de Morais. A descoberta do cálculo sob as perspectivas de Newton e Leibniz. ICEX – Departamento de Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-A3KHVV/1/monografia_warley.pdf>. Acesso em 08 de setembro de 2023.

[7] A. -L. Cauchy, Resume des lesons donnees a l'ecole royale polytechnique sur le calcul infinitesimal, Paris, 1823; in Oeuvres, series 2, vol. 4, p. 44. Cujo trecho utilizado foi traduzido para inglês está disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2975545>. Acesso em 08 de setembro de 2023.

[8]IME, UNICAMP. Noção de limite pela definição. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~apmat/limite-pela-definicao/>. Acesso em 08 de setembro de 2023.

[9]DOURADO, Thiago Augusto Silva. Cálculo Diferencial de Gottfried Wilhelm Von Leibniz. Revista Brasileira de História da Matemática. Vol. 22, n° 44; página 45-60. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/377/340>. Acesso em 09 de setembro de 2023.

[10]RUSSO, Caroline Lourenço. A Simbologia na História do Cálculo. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. 2017. Disponível em:.<https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/118724/mod_resource/content/0/TrabalhodeConclus%C3%A3odeCurso_CarolineLourencoRusso.pdf>. Acesso em 09 de setembro de 2023.

[11]SILVEIRA, Tomás. Leibniz e o triângulo característico de Pascal. Canal SerCiência. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=bmY6JqmDJ4M&list=PLnH3-LafLNrbzb3LHMsGGwO37WrUWmDHM&index=4>. Acesso em 20 de outubro de 2023.

[12]SILVEIRA, Tomás. Leibniz e o cálculo infinitesimal. Canal SerCiência. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=AY7-hL_XKto&list=PLnH3-LafLNrbzb3LHMsGGwO37WrUWmDHM&index=6>. Acesso em: 20 de outubro de 2023;

[13]ROQUE, Tatiana Martins. O cálculo de Leibniz. Canal PROFMAT. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=mZZeopq-d0s>. Acesso em 19 de outubro de 2023.

[14]MELCHIORS, Angeline; SOARES, Maricélia. História do Cálculo Diferencial e Integral. UNIASSELVI. Disponível em:

<https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/view/556/233>. Acesso em 10 de outubro de 2023.

[15]CHILD, J.M..The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. Disponível em: <https://dynref.engr.illinois.edu/rvc_Child_1920.pdf>. Acesso em 15 de outubro de 2023.

[16]HERNANDEZ, O.A.H; FERNANDEZ, J.M.L. Teaching the Fundamental Theorem of Calculus. Disponível em <https://maa.org/press/periodicals/convergence/teaching-the-fundamental-theorem-of-calculus-a-historical-reflection-newtons-proof-of-the-ftc>. Acesso em 12 de dezembro de 2023.