UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

BRUNO MATHEUS CANHOS - 12561405

FRANCISCO TACCOLINI PAPP - 12560770

JOSÉ GUILHERME DUARTE MARUM - 12560561

MARCELO SIMIS MUNIZ - 11813136

ARQUIMEDES, EUCLIDES E OS PITAGÓRICOS

IME

SÃO PAULO

NOVEMBRO 2023

SUMÁRIO

1 OS PITAGÓRICOS

1.1 Sumário Eudemiano de Proclo

A fim de começar a entender um pouco sobre quem foram os pitagóricos, ou mesmo o próprio Pitágoras, é importante primeiro compreender o que foi o *Sumário Eudemiano de Proclo*. Primeiramente, Proclo Diádoco foi um importante filósofo grego no século V a.C., responsável por escrever, dentre outras obras, o *Comentário sobre Euclides, livro I*, sendo considerada uma das principais fontes de informação sobre a história antiga da geometria grega. Posteriormente, outro filósofo grego chamado Eudemo de Rodes, considerado como um dos primeiros historiadores a registrar dados sobre a ciência, vivendo durante o século IV a.C., sintetizou o sumário escrito por Proclo, evidenciando alguns dos principais matemáticos da Grécia Antiga, como Tales de Mileto e o próprio Pitágoras. A importância de tal feito não consiste somente em citar tais nomes, mas também permitir traçar uma linha do tempo na história da matemática, esclarecendo possíveis lacunas existentes.

1.2 Pitágoras e a escola pitagórica

Pouco se sabe sobre a veracidade dos dados que acompanham a pessoa Pitágoras, uma vez que há divergência nas informações fornecidas pelos diferentes historiadores ao longo da história acerca dos dados de sua vida. Há, como afirma Howard Eves, uma névoa de misticismo sobre Pitágoras, tal que até sua existência é questionada. Entretanto, partindo dos dados fornecidos pelo autor em questão, acredita-se que tenha vivido por volta de 572 a.C. na ilha de Samos, e que tenha sido discípulo de Tales devido a diferença de suas idades e da proximidade entre Samos e Mileto, cidade na qual Tales viveu. Após a ascensão do tirano Polícrates ao poder de Samos e do domínio da Jônia pelos persas, Pitágoras emigrou para uma colônia grega no sul da Itália. Posteriormente, em Crotona, fundou a escola pitagórica, centro de estudo das ciências da época e que possuiu uma dinâmica semelhante à de cultos religiosos, i.e., possuía alguns ritos e cerimônias próprios.

A escola acreditava que os números inteiros eram a base tudo que existia. Tal crença exaltou o estudo da aritmética junto com a geometria, música e astronomia, que representavam o *quadrivium*. Além desse grupo de matérias existia o *trivium*, formado pela gramática, lógica e retórica. Tudo isso compunha os fundamentos de uma pessoa educada, valorizada acima de tudo pelos integrantes. É complicado afirmar quais descobertas foram realizadas por Pitágoras e quais foram feitas pelos integrantes da irmandade, justamente pela névoa de misticismo citada anteriormente. Segundo relato, Pitágoras foge das forças democráticas do sul da Itália que ameaçavam sua escola em direção à Metaponto, onde morreu, talvez assassinado, com uma idade próxima aos 75 anos. Devido a tais forças, a escola pitagórica é dispersada, mas a irmandade continuou a existir por pelo menos mais dois séculos.

1.3 A matemática pitagórica

Fascinados pelo misticismo dos números, os pitagóricos podem ser considerados como os pioneiros no estudo da abstração dos números e no desenvolvimento da área conhecida hoje como “teoria dos números”. Existem diversos grupos de números estudados por eles, ganhando destaque os amigáveis, perfeitos, deficientes e abundantes.

Dois números m e n são ditos amigáveis um ao outro se a soma dos divisores próprios de um deles é igual ao outro número. Isto é, tome por exemplo os números 220 e 284, considerado como o primeiro par de números amigáveis a ser descoberto. Considere $D_p(n)$ como uma notação para o conjunto dos números divisores próprios de n e $S(D_p(n))$ como a soma de tais divisores. Dessa forma, $D_p(284) = \{1, 2, 4, 71, 142\}$ e $D_p(220) = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$ e, portanto, $S\left(D_p(284)\right) = 220$ e $S\left(D_p(220)\right) = 284$. Não há uma explicação plausível para o motivo disso acontecer. Entretanto, existia uma superstição que afirmava que caso dois amigos utilizassem talismãs com dois números amigáveis estariam selando uma amizade perfeita. Apenas em 1636 que Pierre de Fermat anunciou um novo par de números amigáveis, 17296 e 18416, que possivelmente foram descobertos pelo árabe Ibn al-Banna' al-Marrakushi no final do século XIII utilizando a fórmula de Tâbit ibn Qorra vide Figura 1. Posteriormente, em 1747, Leonhard Euler forneceu uma lista de 30 pares, que cresceu para um total de mais de 60.

Figura 1 – Fórmula de Tâbit ibn Qorra

7.11 Tâbit ibn Qorra, Al-Karkhi e Nasîr ed-dîn

(a) Tâbit ibn Qorra (826-901) inventou a seguinte regra para determinação de números amigáveis: *Se* $p = 3.2^n - 1$, $q = 3.2^{n-1} - 1$, $r = 9.2^{2n-1} - 1$ *são* 3 *primos ímpares, então* $2^n pq$ *e* $2^n r$ *formam um par de números amigáveis.* Verifique isso para $n = 2$ e $n = 4$ (ver Seção 3-3).

Fonte: Howard Eves, Introdução à História da Matemática, página 274

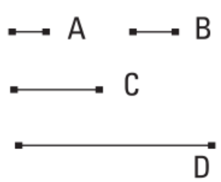
Os números deficientes, perfeitos e abundantes, por sua vez, consideram apenas o número n analisado e seu $D_p(n)$. Caso $D_p(n) < n$, $D_p(n) = n$ e $D_p(n) > n$, n é dito ser deficiente, perfeito ou abundante, respectivamente. Exemplos desses números são o 8, 6 e 12, sendo eles deficiente, perfeito e abundante, respectivamente. A última proposição do nono livro dos *Elementos de Euclides*, citada abaixo, aborda tais números.

"Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, sejam expostos, continuadamente, na proporção duplicada, até que o que foi composto todo junto se torne primo, e o todo junto, tendo sido multiplicado pelo último, faça algum, o produzido será perfeito."

– Os elementos de Euclides, Livro IX, Proposição 36. Tradução feita por Irineu Bicudo

A demonstração é um tanto complicada. Entretanto, o começo da demonstração é o suficiente para entender o que a proposição afirma, como mostra a Figura 2. Euclides definiu, portanto, que caso $2^n - 1$ seja um número primo, então $2^{n-1} * (2^n - 1)$ é um número perfeito. Note que essa forma nos dá apenas números pares. Euler provou futuramente que todo número perfeito par é dessa forma. Ainda é discutido se existem números perfeitos ímpares, mas sabe-se que, caso exista tal número, terá mais de 200 dígitos. Na matemática moderna, se indicarmos por $f(n)$ a soma de todos os divisores de n, incluindo o próprio n, então n é perfeito se e somente se $f(n) = 2n$. Podemos generalizar para *números múltiplos-perfeitos de ordem* k, tal que a fórmula será dada por $f(n) = 2k$, onde k é um número natural não nulo.

Figura 2 – Começo da demonstração feita por Euclides



Fiquem, pois, expostos os números A, B, C, D, quantos quer que sejam, a partir da unidade, na proporção duplicada, até que o que foi composto todo junto se torne primo, e o E seja igual ao todo junto, e o E, tendo multiplicado o D, faça o FG. Digo que o FG é perfeito.

Fonte: Os Elementos de Euclides, tradução por Irineu Bicudo, página 349

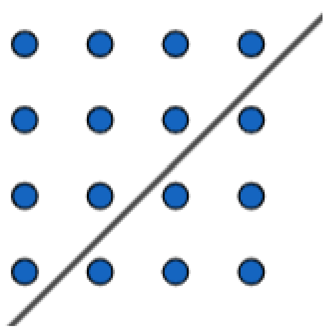
Nem todos os historiadores da matemática atribuem a descoberta dos grupos de números citados anteriormente aos pitagóricos. Entretanto, quanto aos números figurados parece haver uma concordância. Tais números são aqueles que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, estabelecendo um vínculo visual entre a aritmética e a geometria.

Exemplos: Números triangulares – 1, 3, 6, 10, ...; Números quadrados – 1, 4, 9, 16, ...; Números pentagonais – 1, 5, 12, 22, ...

Existem teoremas que acompanham esse tema, e que podem ser representados puramente geometricamente. Entretanto, tal representação auxilia na compreensão do teorema, mas não o demonstra, necessariamente. Tome os seguintes exemplos:

Teorema I: Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos

Representação geométrica:



Note como fica bem mais fácil de visualizar o teorema em questão, mas estamos longe de demonstrá-lo.

Demonstração:

Por definição, é fácil ver que um número Q_n é dito ser o n-ésimo número quadrado se $Q_n = n^2, n \in \mathbb{N}$. Dessa forma:

$$Q_n = n^2 = 2 * \frac{n^2}{2} = \frac{2 * n^2 - n + n}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{n * (n-1) + n * (n+1)}{2} = \frac{n * (n-1)}{2} + \frac{n * (n+1)}{2} \quad (I)$$

Ora, definindo T_n como sendo o n-ésimo número triangular, é evidente que T_n é a soma dos n primeiros números naturais. A demonstração para isso segue o princípio da indução finita. Tendo isso em mente, então

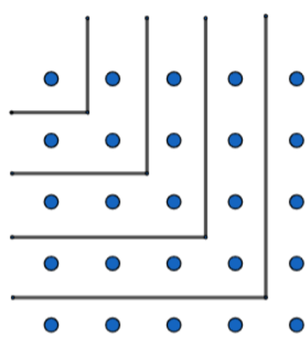
$$T_n = \frac{n * (n+1)}{2} \quad (II)$$

Finalizando, temos que aplicando (II) em (I) obtemos

$$Q_n = T_{n-1} + T_n \quad \blacksquare$$

Teorema II: A soma de um número qualquer de inteiros ímpares consecutivos, começando com o 1, é um quadrado perfeito.

Representação geométrica:



Novamente, o desenho auxilia o leitor a interpretar o teorema e, mais do que isso, fornece um caminho inicial para demonstrá-lo!

Demonstração:

Seja S_n a soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Dessa forma:

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2 * n - 1)$$

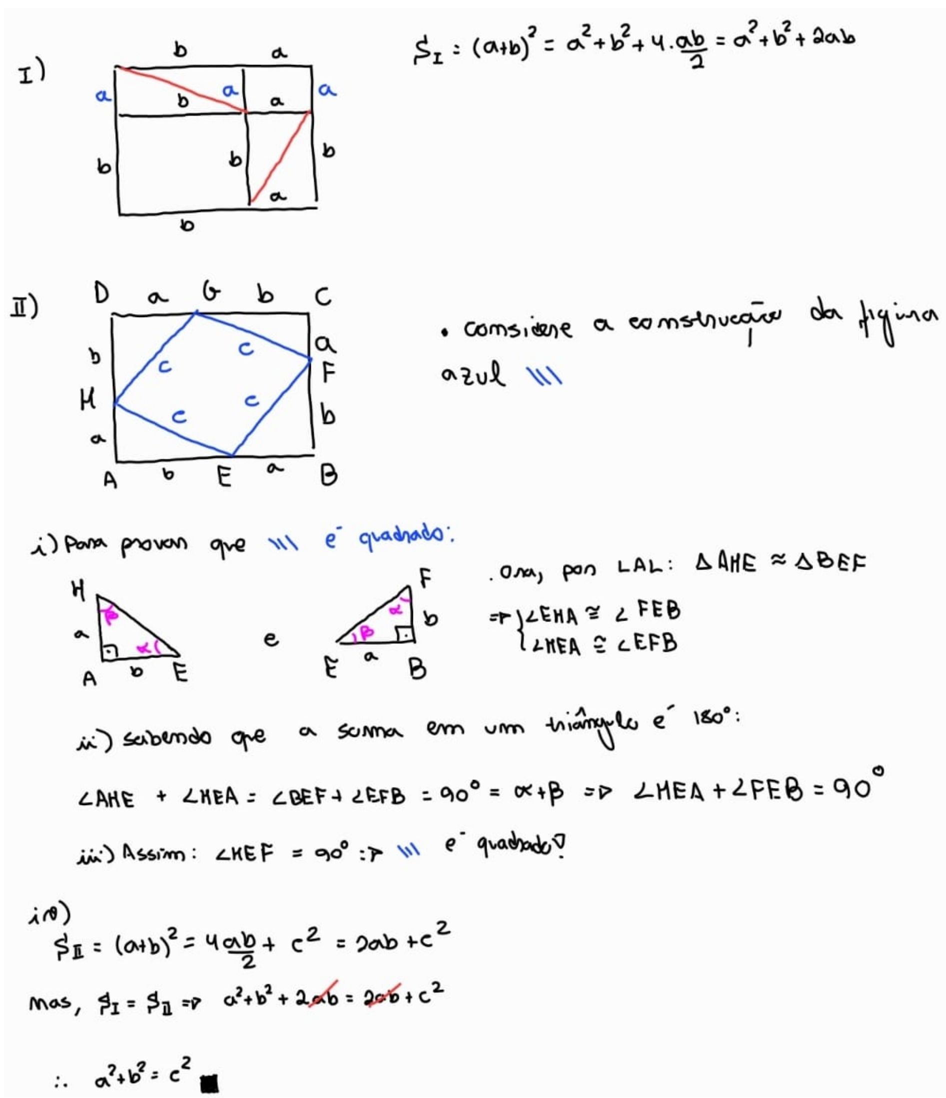
Ora, como os primeiros números ímpares consecutivos formam uma PA de termo inicial $a_1 = 1$ e razão $r = 2$, basta aplicar a fórmula da soma, tal que:

$$S_n = \frac{(a_n + a_1) * n}{2} = \frac{[(2n-1) + (1)] * n}{2} = n^2 \quad \blacksquare$$

1.4 O teorema de Pitágoras e as grandezas irracionais

O resultado que acompanha o teorema já era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mas acredita-se ter sido demonstrado pela primeira vez por Pitágoras, que aplicou o método de decomposição de figuras para demonstrá-lo. Como tal método utiliza o conhecimento de que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º, acredita-se que os pitagóricos também desenvolveram algumas propriedades das retas paralelas ou que, no mínimo, usufruíram dos conhecimentos de Tales de Mileto. A demonstração segue na Figura 3.

Figura 3 – Demonstração do teorema de Pitágoras



Fonte: Resolução feita pelo grupo

O teorema de Pitágoras relaciona três números em um triângulo retângulo, afirmando que, caso eles satisfaçam em alguma ordem a condição de que a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, eles podem ser considerados ternas pitagóricas.

Os pitagóricos valorizavam os números racionais por considerarem que tal conjunto de números era o suficiente para representar qualquer grandeza presente em nossa realidade e, portanto, compunham a essência da humanidade. Entretanto, tal pensamento mudou ao descobrirem que não há nenhum número racional capaz de expressar o valor da diagonal de um quadrado de lado unitário. De fato, pela demonstração vista na Figura 4, é possível mostrar que $\sqrt{2}$ é um número não racional. Por ser uma descoberta que invalidava alguns resultados matemáticos da época, os pitagóricos fizeram, por muito tempo, questão de mantê-la em sigilo.

Figura 4 – Demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2}$

i) Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Então $\exists\, a, b \in \mathbb{Z}^*$: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ e $mdc(a,b) = 1$.

$\Rightarrow \quad a = \sqrt{2}b \Rightarrow a^2 = 2b^2$

ii) Como a^2 é par, "a" também será, pois: a^2 par $\Rightarrow a^2 = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Pelo teorema fundamental da aritimética, deve existir, no mínimo, mais um fator 2 entre os primos de $k \Rightarrow$ "a" é par.

Assim: $a = 2c \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$ e, portanto, b é par

iii) Mas $mdc(a,b) = 1$. Chegamos assim, em um absurdo!

$\therefore \sqrt{2} \in \overline{\mathbb{Q}}$ ■

Fonte: Resolução feita pelo grupo

1.5 Os pitagóricos e Euclides

Muitos raciocínios utilizados pela escola pitagórica podem ser observados em alguns postulados e demonstrações feitas posteriormente por Euclides como, por exemplo, a demonstração da proposição 4 do Livro II dos *Elementos*. Por esse motivo, acredita-se que os pitagóricos foram os principais responsáveis pelo desenvolvimento inicial de processos algébricos, estando relacionados com a geometria. Por meio do uso de proporções de segmentos ou da transformação de áreas de certas figuras em outras semelhantes, foram capazes de avançar consideravelmente o raciocínio postulacional da época. Apesar de importante e poderosa, a álgebra geométrica é um tanto complexa quando comparada com a notação algébrica atual. Por esse motivo, fica ainda mais evidente a importância que Euclides desempenhou na matemática ao divulgar seu livro *Os Elementos*. Apesar de poder ser interpretada como uma compilação da matemática da época, foi capaz de introduzir conceitos fundamentais para o avanço dessa ciência.

2 OS TRÊS GRANDES PROBLEMAS

Os primeiros 300 anos da matemática grega, desde Tales de Mileto até Euclides, testemunharam realizações extraordinárias. Além do desenvolvimento do material organizado nos Elementos e de noções relacionadas ao que hoje chamamos de infinitésimos e infinitos, houve uma terceira linha importante de progresso: a geometria superior, ou geometria de curvas e superfícies mais complexas que a reta, o círculo e suas extensões.

Essa geometria superior originou-se de tentativas de resolver três problemas famosos de construção geométrica que se mostraram impossíveis usando apenas régua e compasso: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo [1].

A busca por soluções para esses problemas influenciou profundamente o desenvolvimento da matemática grega. Levou à descoberta das secções cônicas, de curvas cúbicas e quárticas, e mais tarde à teoria dos números algébricos e grupos. Somente no século XIX provou-se a impossibilidade das construções sob as restrições impostas [3]. Ainda assim, a persistência na busca por soluções, apesar de fadada ao fracasso, foi extremamente valiosa heuristicamente, ilustrando o potencial de problemas atraentes em estimular novas teorias matemáticas.

2.1 A duplicação do cubo

O problema da duplicação do cubo pede para, dado um cubo, construir outro com o dobro do volume utilizando apenas régua e compasso, os instrumentos permitidos por Euclides.

A origem deste problema é nebulosa. Uma lenda remonta sua origem à insatisfação do rei Minos com o tamanho do túmulo de seu filho Glauco, conforme descrito por um poeta antigo. O poeta, então, orienta o rei que a solução consistiria em dobrar todas as dimensões do túmulo - o que, como sabemos, é incorreto. Outra origem é com o povo de Delos, que tentava dobrar o volume de um altar de Apolo para se livrar de uma praga (e, por isso, o problema também é conhecido como *deliano*) [1].

O primeiro progresso veio com Hipócrates por volta de 440 a.C, que nota a seguinte relação entre proporções:

$$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s} \Rightarrow x^2 = s \cdot y,\ y^2 = x \cdot 2s \therefore \left(\frac{x^2}{s}\right)^2 = x \cdot 2s \Rightarrow x^3 = 2s^3$$

Ou seja, encontrando x e y que obedecessem a estas relações para um cubo de aresta s, teremos que o cubo de aresta *x* terá o dobro do volume do cubo de aresta *s* [1]. A partir desta redução, os gregos foram capazes de encontrar ao menos onze soluções distintas [4] - dentre elas, uma que se destaca é a de Menêcmo, por volta de 350 a.C. [1]:

Constroem-se as curvas $ay = x^2$, $y^2 = bx$, e $xy = ab$. Dadas as três, é trivial provar que a interseção de quaisquer duas terá coordenadas $\left(\sqrt[3]{a^2b}, \sqrt[3]{ab^2}\right)$. Dessa forma, conseguiremos construir o número $\sqrt[3]{2}$, e, por conseguinte, a partir de um cubo com aresta *x*, construir um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2} \cdot x$, que dará origem ao cubo com o dobro do volume [4].

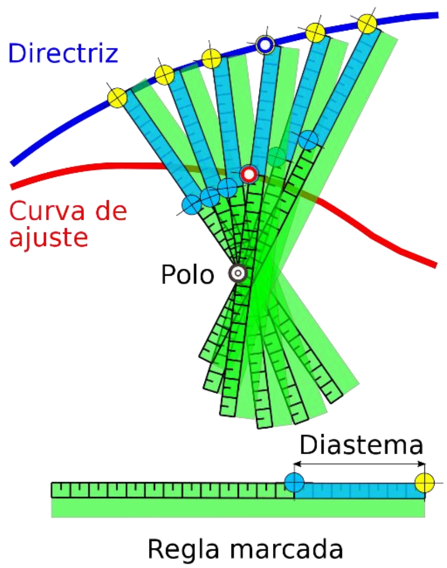
Esta solução em particular é interessante pois é justamente à ela que atribuímos a invenção das seções cônicas - em específico, é a primeira vez em que se registra o uso de parábolas e de uma hipérbole desta forma [1]. Entretanto, apesar das engenhosas tentativas com curvas complexas ao longo dos séculos, mais tarde se provaria ser impossível uma duplicação exata do cubo utilizando apenas régua e compasso [5]. A busca frustrada, porém, gerou avanços extraordinários para a emergente matemática grega – ilustrado perfeitamente pela invenção das cônicas.

2.2 A trissecção do ângulo

O problema da trissecção de um ângulo arbitrário remonta aos primórdios da matemática grega. Consiste, essencialmente, em dividir um ângulo em três partes congruentes. Sua origem específica é incerta. Uma possibilidade é que tenha surgido da tentativa de construir um polígono regular de nove lados inscrito numa circunferência, o que requer trissecionar o ângulo central de 60°. Outra hipótese vincula o problema ao desenvolvimento da noção grega de simetria e divisão harmônica [1].

De toda forma, a aparente simplicidade da bissecção contrastava com a dificuldade da trissecção, atraindo a atenção dos geômetras gregos. Eles foram capazes de elaborar uma resolução utilizando a ferramenta de *neusis* [6]: dada uma reta r e um ponto P fora dela, construir sobre r um segmento congruente a um dado e que "aponte" para P – essencialmente, “escorregar” uma régua marcada em torno de duas curvas.

Figura 5 – Representação visual da construção com neusis.



Fonte: Wikimedia Commons.

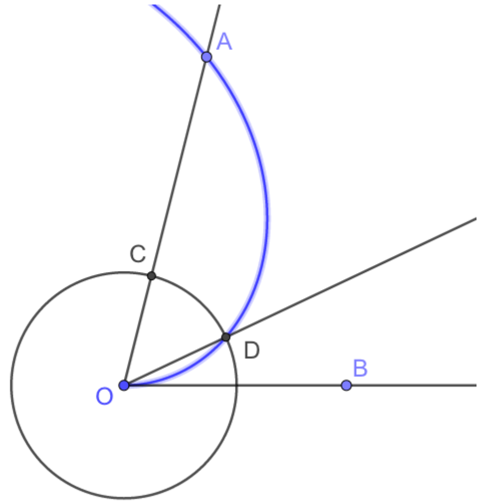
Outra solução, mais simples, envolve a Espiral de Arquimedes. Definimos a espiral, em coordenadas polares, com $r = a \cdot \theta,\ a \neq 0$. Construímos, então, a espiral no vértice de um ângulo $\angle A'OB$ e tomamos a primeira interseção de ambos como sendo A (note que a interseção existe, pois a espiral está definida para todos os ângulos). Então, dividimos o segmento *OA* em três, formando o segmento *OC*. Traçamos uma circunferência com base neste segmento e centro em *O*, e definimos como *D* a interseção desta circunferência com a espiral. Temos:

$m(OA) = a \cdot m(\angle AOB),\ m(OD) = a \cdot \beta$, para algum valor de β.

Pela construção,

$3 \cdot m(OD) = m(OA) \Rightarrow 3 \cdot a \cdot \beta = a \cdot m(\angle AOB) \Rightarrow 3 \cdot \beta = m(\angle AOB)$, e, portanto, β é o ângulo que desejamos.

Figura 6 - construção da trissecção do ângulo com a Espiral de Arquimedes.



Fonte: Imagem feita pelo grupo.

Além dessas duas, existem também soluções envolvendo outras curvas, tais como o Conchoide de Nicomedes e a Quadratriz de Hípias, que são capazes de resolver ainda mais problemas (a Quadratriz de Hípias, por exemplo, recebe esse nome justamente por ser capaz de resolver o problema da quadratura do círculo). A despeito de todas as tentativas, o problema resistiu aos geômetras gregos. Séculos depois, se provaria impossível uma trissecção exata por construção apenas com régua e compasso. A busca obstinada gerou, porém, desenvolvimentos fundamentais para a emergente matemática grega [1].

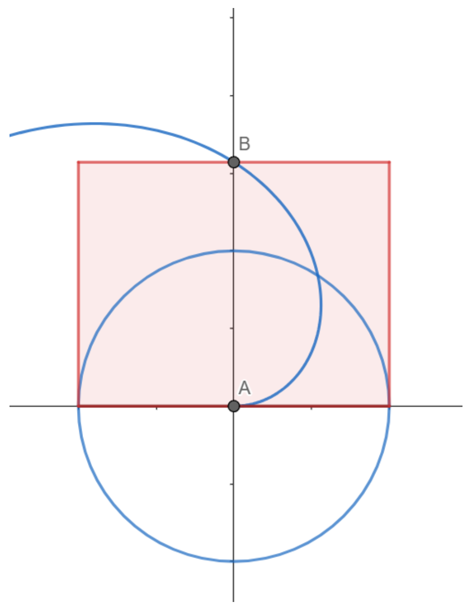
2.3 A quadratura do círculo

O fascinante problema de construir um quadrado com mesma área de um círculo dado utilizando apenas régua e compasso é conhecido como quadratura do círculo. Sua origem remonta à matemática egípcia do segundo milênio a.C., que buscava aproximar o círculo por quadrados. Na Grécia, o primeiro a considerar o problema teria sido Anaxágoras no século V a.C. Logo depois, seu contemporâneo Hipócrates de Quio obteve progressos realizando a quadratura de figuras em forma de lua delimitadas por arcos. Entre outras tentativas históricas, há a aplicação da quadratriz de Hípias por Dinostrato no século IV a.C. e o uso da espiral por Arquimedes no século III a.C [1].

Uma das formas de realizar a quadratura com a espiral de Arquimedes consiste em construir um retângulo com a mesma área do círculo, a partir do qual é possível construir um quadrado usando apenas régua e compasso (conforme provado por Euclides em "Os Elemento"). Podemos fazer isso da seguinte forma:

Dado um círculo de raio a e centro A, traçamos a espiral $r = a \cdot \theta$ com origem em A. Tomamos a primeira interseção da espiral com a reta perpendicular à reta tangente à espiral em A como B. Pela definição da espiral, sabemos que $m(AB) = a \cdot \frac{\pi}{2}$, e construímos o retângulo de base igual ao diâmetro da circunferência e altura igual a AB. Sua área, portanto, será $\left(a \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot (2 \cdot a) = \pi \cdot a^2$, que é a mesma área do círculo.

Figura 7 - construção da quadratura do círculo com a Espiral de Arquimedes.



Fonte: Imagem feita pelo grupo.

A quadratura do círculo, assim como os problemas da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo, resistiu às inúmeras tentativas da genialidade grega. Apenas séculos mais tarde, com os desenvolvimentos da análise matemática, é que se provaria rigorosamente a impossibilidade dessas três clássicas construções geométricas utilizando apenas os instrumentos permitidos por Euclides. Contudo, a persistência dos geômetras gregos em busca da impossível quadratura foi crucial para o nascimento e consolidação de novos campos da matemática, como a geometria analítica e o estudo de curvas complexas para além de retas e circunferências. Assim, ainda que equivocados em seus objetivos, seus esforços teimosos levaram a realizações e descobertas extraordinárias [1].

De certa forma, esses três antigos problemas encapsulam metaforicamente a própria essência da matemática e sua história: a obstinada superação de impossibilidades aparentes através da elaboração de novas ferramentas e estruturas de pensamento, numa incansável ânsia pela resolução elegante e harmônica.

3 EUCLIDES E SEUS ELEMENTOS

Após a Guerra do Peloponeso a desunião entre os Estados gregos facilitou o anexo da Grécia ao império da Macedônia. O imperador da época, Filipe foi sucedido por seu filho Alexandre, que continuou a ampliar os territórios do império, e ao conquistar o Egito, fundou ali a grandiosa cidade de Alexandria, em 332 a.C.

Após a morte de Alexandre, um de seus líderes militares, Ptolomeu, foi escolhido para governar o Egito, adotou Alexandria como sua capital e atraiu homens reconhecidos por seus conhecimentos e então construiu a Biblioteca de Alexandria, que funcionava como uma espécie de universidade, sendo provavelmente a primeira instituição do gênero da qual temos conhecimento.

Este capítulo focará em expor sobre a vida e obra de Euclides, um dos chefes do departamento de matemática da biblioteca.

3.1 Euclides

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, apenas breves comentários de que ele seria modesto e aparentemente era um bom professor. Há também algumas citações atribuídas a ele, como por exemplo, quando foi confrontado por Ptolomeu a respeito da dificuldade de aprender geometria, e é respondido com a frase: “Não há estradas reais na geometria”, existe também outra história atribuída a ele ao ser confrontado por um de seus alunos com a infame pergunta: “qual a utilidade prática disto que estamos aprendendo”, Euclides então teria ordenado a um escravo para que desse uma moeda a esse aluno, para que dessa forma este encontrasse na matemática alguma “utilidade”.

3.2 Os Elementos de Euclides

Sobre as obras de Euclides, temos ao menos cinco que chegaram de forma completa para nós, mas esses são ofuscados pelo tamanho da genialidade envolta no seu compilado de 13 livros chamados de Os Elementos. Este trabalho, além da Bíblia, provavelmente foi o que mais trouxe influência para o desenvolvimento do pensamento humano. Possui mais de mil edições impressas.

O trabalho, como já dito, é um compilado de 13 livros, contendo no total 465 proposições. Muitas dessas não são originalmente de Euclides, mas contam com um aperfeiçoamento em suas demonstrações, sendo esse, na verdade, o grande mérito deste trabalho. Euclides percebeu que as demonstrações matemáticas da forma que eram feitas, não demonstravam nada de fato, pois levavam a um argumento circular, como o dicionário, que define, por exemplo A como sendo análogo a B, da mesma forma B a C, e então em algum momento, esta corrente volta para A, portanto, nada novo foi descoberto a respeito de A. Para evitar que as demonstrações utilizassem esta falácia do argumento circular, Euclides define uma forma postulacional de raciocínio, dessa forma são definidos como verdades auto evidentes os axiomas, e outras verdades, não tão auto evidentes, os postulados, dessa forma as proposições seriam agora demonstradas a partir desses axiomas e postulados. É importante comentar que futuramente foram feitas algumas correções nesse sistema lógico, principalmente por Hilbert, ainda que não seja este o foco dessa exposição.

Quanto aos axiomas definidos por Euclides, são esses:

- A1 Coisas iguais à mesma coisa, são iguais entre si;
- A2 Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais;
- A3 Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais;
- A4 Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si;
- A5 O todo é maior que a parte.

Quanto aos postulados, são esses:

- P1 É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer;
- P2 É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta;
- P3 É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio;

- P4 Todos os ângulos retos são iguais entre si;
- P5 Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

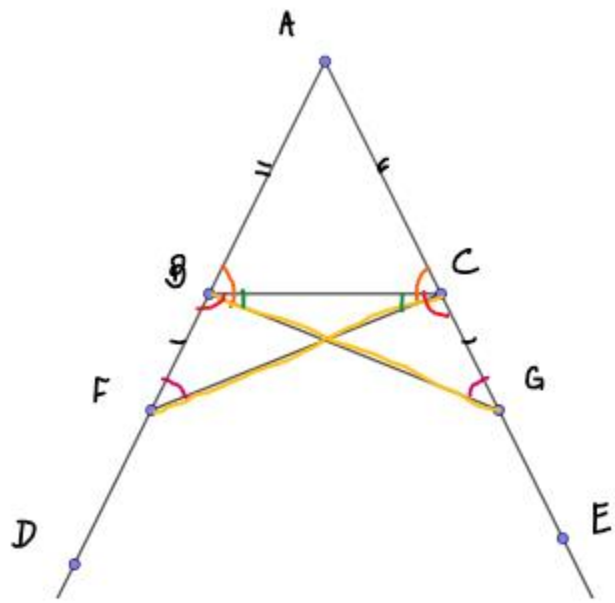
Como podemos ver o quinto postulado parece diferente dos outros quatro, parecendo uma proposição, e a tentativa de demonstrar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros foi uma discussão que só começou a dar indícios de se resolver após aproximadamente dois mil anos, com o desenvolvimento das geometrias não euclidianas. É possível que Euclides também tenha notado a estranheza desse postulado e tentar apresentá-lo como proposição, uma vez que este só foi utilizado muito próximo do fim do primeiro livro dos Elementos, embora seja somente especulação.

Quanto ao conteúdo dos Elementos, o Livro I apresenta os axiomas e postulados mostrados acima e traz a maior parte das propriedades de triângulos conhecidas hoje, apresenta a teoria de paralelas e demonstra que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos (proposição equivalente ao quinto postulado), este livro ainda traz algumas relações entre áreas e finaliza com o teorema de Pitágoras e sua recíproca.

Faremos agora a demonstração da proposição 5 do Livro I, conhecida como Pons Asinorum, que faz referência a dificuldade de um burro em atravessar uma ponte, mostrando que sua demonstração não era trivial e causava confusão nos estudiosos da época.

Seja um triângulo ABC isósceles onde $AB \cong AC$ (falo de dois segmentos congruentes). E queremos demonstrar que (como dito por Euclides) que os ângulos junto à base são iguais entre si e tendo sido prolongadas as retas iguais, os ângulos sob a base também serão iguais.

Figura 8 – Representação da construção descrita.



Fonte: Construção feita pelo grupo.

Queremos mostrar que ∡FBC≅∡GCB e ∡ABC≅ACB

·É dado que AB≅AC (Dado)

·Prolongue AB e AC e temos AD e AE.

·Tome F e G tais que AF≅AG (note que Euclides não usa a noção de ordenamento)

·Crie FC e BG, e ainda temos por noção comum 3 que BF≅CG

·I4 (LAL)⇒ΔABG≅ΔACF⇒∡AGB≅∡AFC, ∡ABG≅∡ACF e BG≅CF.

·Novamente por LAL temos, ΔBFC≅ ΔCGB⇒ ∡FBC≅∡GCB e ∡GBC≅∡FCB

·Dessa forma, a noção comum 3 nos permite a subtração e ângulos, então ao subtrair os ∡GBC e ∡FCB de ∡ABG e ∡ACF, obtemos: ∡ABC≅∡ACB e temos também ∡FBC≅∡GCB, como queríamos demonstrar. ■

O Livro II continua a tratar de relações entre áreas e introduz algumas noções de álgebra, mas de forma geométrica, trazendo relações amplamente conhecidas hoje, como por exemplo de que dados $a,\ b\ \in R,\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$ ou ainda $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ entre outras relações conhecidas. Ainda no Livro II, surpreendentemente, nos é apresentada uma versão antiga do que hoje é conhecida como lei dos cossenos, e é enunciada de forma mais moderna: “Num triângulo obtusângulo (acutângulo), o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso (agudo), é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados acrescida (diminuída) do dobro do produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele".

Nos Livros III e IV são apresentados teoremas hoje conhecidos amplamente sobre círculos, cordas, secantes, etc, e também abordam a construtibilidade com régua e compasse de alguns polígonos regulares.

O Livro V aborda a teoria das proporções de Eudoxo que encontra uma forma de trabalhar com as medidas irracionais que quando descobertas pelos pitagóricos causaram um escândalo, afinal estes acreditavam que os números racionais eram uma espécie de unidade fundamental da matemática, algo como a ideia de átomo que começava a surgir na Grécia. A teoria das proporções pode ser enunciada dessa forma: "Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente".

O Livro VI aplica a teoria de proporções à geometria plana, apresenta teorema relacionados a semelhança de triângulos e ainda traz resoluções geométricas de equações de segundo grau.

O Livro VII apresenta o algoritmo euclidiano que tem como utilidade encontrar o máximo divisor comum, o que possibilita verificar se dois números inteiros são primos entre si. O Livro VIII trata de proporções contínuas e progressões geométricas.

No Livro IX temos apresentado teorema fundamental da aritmética, que diz, de forma moderna que dado um inteiro maior que 1, este é expresso pelo produto de números primos de forma única. Também temos neste livro a dedução da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Temos também, a ser demonstrada a prova de que existe uma infinidade de números primos, usando um argumento de redução ao absurdo, temos: suponha que existe um número k de primos, denotemos então o conjunto dos primos $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ seja então $P = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$, então $P + 1$ ou é primo ou é composto, mas se $P + 1$ é composto deveria ser divisível por algum p_i, mas sabemos que $p_i \in \{p_1, \dots, p_k\}$, portanto, não deve dividir $P + 1$ pois $p > 1$, portanto, supor a finitude dos primos leva a um absurdo, logo admitimos a negação da hipótese e portanto há um número infinito de primos.

O Livro X tem como principal foco o tratamento dos números irracionais, estes eram definidos como segmentos incomensuráveis a partir de um segmento dado, ou em outras palavras, seria impossível tomar um segmento e apenas dividindo e multiplicando este segmento por inteiros, este segmento não se tornaria, jamais, igual ao segmento que fosse incomensurável a partir do primeiro segmento, embora possam se aproximar tanto quanto se queira. O conteúdo do Livro X é atribuído a Teeteto, mas assim como nos outros livros, há o mérito de Euclides em polir todos os conhecimentos que já se tinham na época e incluí-los no seu sistema postulacional de dedução. É importante dizer também que a primeira proposição do Livro X é a base para o método de exaustão, que será comentado mais à frente, sendo essa a seguinte: "Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta".

Os Livros XI, XII e XIII trataremos juntamente pois cobrem quase todos os conhecimentos ensinados no ensino básico com exceção de alguns teoremas relacionados a esfera, que foram posteriormente mais bem desenvolvidos por outros matemáticos notáveis, como Arquimedes. O Livro XI traz teoremas sobre retas e planos no espaço e também trata de prismas e pirâmides. O Livro XII utiliza o método de exaustão e aborda magistralmente algumas relações entre volumes, como por exemplo a proposição XII – 10 que demonstra que o cone com mesma base e altura de um certo cilindro, tem um terço do volume deste cilindro. Outra relação impressionante demonstrada por Euclides nos diz que: "as esferas estão entre si em uma razão tripla dados próprios diâmetros" isto quer dizer basicamente que se temos duas esferas Γ_1 e Γ_2, que tenham, respectivamente, seus diâmetros iguais D_1 e D_2, e volumes da mesma forma V_1 e V_2, temos que $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3$, sendo essa a última proposição do Livro XII, que já mostra uma sofisticação impressionante da geometria euclidiana na época. O Livro XIII, por sua vez tem um propósito bastante claro, que é o de inscrever os cinco poliedros regulares numa esfera.

Dessa forma Euclides finaliza seus Elementos, sendo provavelmente o trabalho mais importante para o desenvolvimento da matemática, e do pensamento humano.

4 A MATEMÁTICA GREGA DEPOIS DE EUCLIDES

4.1 Arquimedes

Arquimedes, nascido em cerca de 287 a.C. na cidade grega de Siracusa, localizada na Sicília, é amplamente considerado um dos maiores matemáticos da história e, especialmente, o maior da Antiguidade. Filho de um astrônomo, ele desfrutou de grande prestígio junto ao rei Hierão. Arquimedes pode ter estudado no Egito, em Alexandria, onde teve contato com matemáticos notáveis da época, como Cônon, Dositeo e Eratóstenes. Ele é lembrado por suas contribuições excepcionais em diversas áreas da matemática e da física. Arquimedes ficou famoso por suas inovações na defesa de Siracusa durante o cerco da cidade pelos romanos. Ele projetou e construiu engenhos mecânicos criativos, como catapultas móveis e guindastes, que ajudaram a defender a cidade. Uma história conhecida é a do uso de espelhos ustórios para incendiar navios inimigos, embora a veracidade dessa história seja debatida pelo relado ser posterior. Além disso, ele demonstrou seu conhecimento da hidrostática e da matemática aplicada por meio de suas obras "Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas" e "Sobre os Corpos Flutuantes". Arquimedes também contribuiu significativamente para a geometria, escrevendo tratados como "A Medida de um Círculo", "A Quadratura da Parábola" e "Sobre as Espirais".

É importante notar que Arquimedes não inventou o cálculo da mesma forma como é entendido nos tempos modernos. O cálculo, como é conhecido hoje, foi desenvolvido muitos séculos após a época de Arquimedes, principalmente por matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII. No entanto, Arquimedes contribuiu para o desenvolvimento de técnicas e métodos que são considerados precursores do cálculo integral. Ele abordou problemas de áreas e volumes de figuras geométricas complexas usando métodos de exaustão, que são semelhantes aos conceitos usados no cálculo integral. O método de exaustão criado por Eudoxo e usado e aperfeiçoado por Arquimedes envolvia a divisão da figura em partes menores e a aproximação das áreas e volumes dessas partes por meio de figuras mais simples, como retângulos e triângulos.

Um exemplo notável de sua abordagem está em seu trabalho "A Medida de um Círculo", onde ele calcula a área de um círculo usando um método de exaustão. Ele inscreve e circunscreve polígonos regulares ao redor do círculo e calcula suas áreas. Ao aumentar o número de lados dos polígonos, ele se aproxima cada vez mais da área do círculo e para aproximar o valor de π usando hexágonos.

Embora alguns de seus trabalhos tenham sido perdidos ao longo do tempo, suas contribuições para a matemática e a ciência influenciaram profundamente o desenvolvimento subsequente desses campos. Arquimedes faleceu durante o cerco de Siracusa, mas seu legado perdura até hoje, sendo lembrado por sua genialidade e inovação em diversas áreas da matemática e da física. Algumas de suas principais contribuições incluem:

1. Leis de Arquimedes: Suas investigações sobre os princípios da hidrostática levaram à formulação das leis de Arquimedes, que descrevem o empuxo exercido por um fluido em um objeto imerso nele. Essas leis estabelecem que um corpo submerso em um fluido sofre uma força ascendente igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo. Essa descoberta é fundamental para entender a flutuação de objetos em líquidos e é aplicada em diversos contextos, como a flutuação de navios e aeronaves.
2. Áreas de Figuras Planas: Arquimedes estudou as áreas de figuras curvas, como o círculo e a parábola. Ele calculou a área da região limitada por uma parábola e duas cordas paralelas, estabelecendo relações entre áreas de figuras relacionadas.
3. Volumes de Sólidos Geométricos: Em seus trabalhos "Sobre a Esfera e o Cilindro" e "Sobre os Cones e os Esferoides", Arquimedes explorou a geometria espacial, determinando volumes de esferas, cilindros, cones e esferoides. Ele também relacionou as áreas das calotas esféricas com as áreas das esferas e os volumes dos cilindros circulares retilíneos circunscritos às esferas.
4. Invenções Mecânicas: Além de suas contribuições científicas, Arquimedes projetou e construiu engenhos mecânicos para aplicações práticas. Ele é conhecido pela invenção da bomba de água em parafuso, que tinha diversas aplicações em irrigação e drenagem. Também é lembrado por suas criações de dispositivos de defesa durante o cerco de Siracusa, como guindastes e catapultas móveis.

5. Planetário: Arquimedes teria criado um planetário mecânico para demonstrar os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas visíveis a olho nu. Essa invenção revela seu interesse tanto na astronomia quanto na engenharia.
6. Contribuições à Aritmética: Arquimedes escreveu sobre um novo sistema de numeração para representar números muito grandes, incluindo um método para expressar números exponenciais.
7. O Loculus Archimedius, um quebra-cabeça instigante composto de 14 peças poligonais variadas a serem armadas de modo a formar um quadrado.

4.2 Eratóstenes

Eratóstenes, natural de Cirene, foi um erudito multifacetado que se destacou como matemático, astrônomo, geógrafo, historiador, filósofo, poeta e atleta. Convidado por Ptolomeu III do Egito, mudou-se para Alexandria, tornando-se tutor do filho do rei e bibliotecário-chefe da Universidade local. Apesar de sua vasta erudição, algumas fontes sugerem que ele era conhecido como "Beta" (que significa “2” ou “2°”) devido a nunca ser o primeiro em nenhum campo, mas tal explicação é questionável, já que Apolônio também era chamado de “Epsilon” (que significa “5”), assim esses números poderiam indicar suas salas.

Eratóstenes, como diretor da Biblioteca de Alexandria, utilizou seus conhecimentos sobre as datas dos solstícios e equinócios para realizar uma notável medição da circunferência da Terra. Sabendo que, durante o Solstício de Verão, em Siena, o Sol atingia o zênite ao meio-dia, enquanto, testando em Alexandria, na mesma data e hora, isso não ocorria, ele inferiu a possibilidade de medir a circunferência terrestre. Colocando uma estaca vertical em Alexandria e medindo a sombra em relação ao comprimento da estaca, obteve um ângulo de 7,2° ou 1/50 da circunferência. Assumindo que o ângulo entre as cidades era o mesmo que a estaca fazia com a luz do sol, Eratóstenes estendeu os raios solares imaginariamente até o centro da Terra, permitindo-lhe calcular a distância entre as cidades. Ele realizou uma expedição entre as cidades e descobriu que essa distância era de 5.000 estádios, uma unidade de medida que ele utilizou, e que cada estádio tinha aproximadamente 157 metros, multiplicou esse valor por 50 para encontrar a circunferência da Terra. Surpreendentemente preciso para sua época, Eratóstenes obteve um valor próximo a 39.250 km, enquanto a medição contemporânea estabelece a circunferência da Terra em 40.075 km. Sua engenhosidade e precisão são admiráveis, destacando-se como um notável feito na história da ciência. [2]

Além disso, ele desenvolveu um dispositivo chamado "crivo" para encontrar todos os números primos menores que um dado número n. Esse método envolvia listar todos os números entre 2 e n, com n sendo o maior número da sua lista. A partir do primeiro número primo, que é 2, são cortados todos os seus múltiplos da lista, o processo é repetido para os próximos números ímpares até alcançar o valor n, restando na lista os números primos. Para melhorar o crivo é possível fazer uma lista com apenas ímpares e parar de cortar quando chegar em um valor próximo de raiz de n, acrescentando o número 2 no final.

4.3 Apolônio

Apolônio, nascido em Perga por volta de 262 a.C., destacou-se como um dos gigantes da matemática no século III a.C., juntamente com Euclides e Arquimedes. Após estudar em Alexandria, permaneceu na cidade por um longo período antes de visitar Pérgamo e, posteriormente, retornar a Alexandria, onde faleceu por volta de 190 a.C. Sua principal obra, "Secções Cônicas", tornou-o conhecido como "O Grande Geômetra". Este tratado, composto por oito livros, apresenta aproximadamente 400 proposições detalhadas sobre as curvas cônicas, superando trabalhos anteriores de Menaecmo, Aristeu e Euclides. Apolônio revolucionou o entendimento das cônicas ao derivá-las a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo, em vez dos três tipos de cones de revolução utilizados anteriormente. Além disso, introduziu os termos "elipse", "parábola" e "hipérbole", utilizando uma abordagem geométrica e analítica inovadora. Seu trabalho influente também abordou normais, assíntotas, tangências e incluiu uma análise completa das cônicas iguais e semelhantes. Embora sua obra seja extensa e complexa, a contribuição de Apolônio para a matemática, especialmente na trigonometria e nas cônicas, é reconhecida como um marco significativo na história da disciplina.

4.4 Trigonometria grega

4.4.1 Hiparco

Hiparco, um astrônomo proeminente do século II a.C., foi fundamental para o desenvolvimento da trigonometria grega. Além de suas contribuições significativas para a astronomia, como a determinação precisa do mês lunar médio, um estimativa da precessão dos equinócios e a medição da inclinação da eclíptica, ele desempenhou um papel crucial na trigonometria ao introduzir a divisão do círculo em 360 graus. A ele também é atribuída a autoria de um tratado sobre a construção de uma tábua de cordas, precursora das tabelas de senos utilizadas posteriormente por Ptolomeu.

4.4.2 Menelau

Menelau de Alexandria, contemporâneo de Plutarco, destacou-se na trigonometria com seu tratado "Sphaerica". Neste trabalho, Menelau definiu pela primeira vez o triângulo esférico e estabeleceu muitas proposições análogas às de Euclides para triângulos planos. Seu teorema, conhecido como "Teorema de Menelau", proporcionou uma base importante para a trigonometria esférica, estabelecendo relações entre segmentos em triângulos esféricos. Apesar de parte de seus escritos terem se perdido, "Sphaerica" preservou-se em uma versão árabe.

Figura 9 – teorema de Menelau.

Se uma transversal intercepta os lados BC, CA, AB de um triângulo ABC nos pontos L, M e N, respectivamente, então

$$\left(\frac{AN}{NB}\right)\left(\frac{BL}{LC}\right)\left(\frac{CM}{MA}\right)=-1.$$

Fonte: Howard Eves, Introdução à História da Matemática.

4.4.3 Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu, um astrônomo e matemático de Alexandria do século II d.C., é conhecido por seu influente trabalho "Almagesto", cujo nome significa “o maior”. Neste tratado, Ptolomeu apresentou uma tábua de cordas baseada em um teorema geométrico que leva seu nome. Essa tábua fornece os senos dos ângulos de 0° a 90°, com espaçamento de 15´, e é uma contribuição valiosa para a trigonometria. Além disso, Ptolomeu desenvolveu o sistema astronômico geocêntrico a partir de epiciclos para descrever os movimentos dos planetas, consolidando-se como uma figura central na história da astronomia e da trigonometria grega.

4.4.4 Ptolomeu

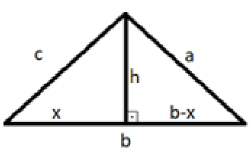
Cláudio Ptolomeu, um astrônomo e matemático de Alexandria do século II d.C., é conhecido por seu influente trabalho "Almagesto", cujo nome significa “o maior”. Neste tratado, Ptolomeu apresentou uma tábua de cordas baseada em um teorema geométrico que leva seu nome. Essa tábua fornece os senos dos ângulos de 0° a 90°, com espaçamento de 15´, e é uma contribuição valiosa para a trigonometria. Além disso, Ptolomeu desenvolveu o sistema astronômico geocêntrico a partir de epiciclos para descrever os movimentos dos planetas, consolidando-se como uma figura central na história da astronomia e da trigonometria grega.

4.5 Herão

Herão de Alexandria, um destacado matemático da antiguidade, viveu na segunda metade do século I d.C., embora as estimativas de sua vida variem. Reconhecido como um enciclopedista em matemática e física, seus numerosos trabalhos enfatizam aplicações práticas sobre teoria. Divididos em trabalhos geométricos e mecânicos, seus escritos geométricos incluem "A Métrica", destacando-se pela dedução da fórmula da área de um triângulo em termos dos três lados.

Figura 10 – Demonstração da fórmula de Herão.

Fórmula de Herão para a área de um triângulo: $At = \sqrt{(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2}$, onde $s = \frac{a+b+c}{2}$



Pelo Teorema de Pitágoras: $a^2 = h^2 + (b-x)^2$ e $c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{c^2 - h^2}$

$$\Rightarrow a^2 = h^2 + \left(b - \sqrt{c^2 - h^2}\right)^2 = b^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 2b\sqrt{c^2 - h^2}$$

$$\Rightarrow c^2 - h^2 = \left[\frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2b}\right]^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2$$

Mas, como a área de um triângulo é dada por $At = \frac{b.h}{2} \Rightarrow At^2 = \frac{h^2.b^2}{4}$

$$\begin{aligned} At^2 &= \frac{b^2}{4}\left[c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2\right] = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16} = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16} \\ &= \frac{(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)}{16} = \frac{[-a^2 + (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2]}{16} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(c-b+a)}{16} = \frac{a+b+c}{2} . \frac{a-b+c}{2} . \frac{a+b-c}{2} . \frac{-a+b+c}{2} \\ &= s(s-b)(s-c)(s-a) \end{aligned}$$

Logo: $At = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Fonte: Demonstração feita pelo grupo.

Além disso, introduziu um método para aproximar a raiz quadrada de números não quadrados perfeitos. Que consiste em pegar dois números a_0 e a_1 que quando multiplicados sejam o número que é buscado (n), então $n = a_0 . a_1$. Dessa forma, a aproximação melhora quanto menor for a diferença de x e y, logo uma forma de ir melhorando continuamente é e seguir fazendo isso até que a_i tenha uma aproximação suficientemente boa de $\sqrt{n}$.

Os trabalhos mecânicos de Herão incluem a "Pneumática", com descrição de cerca de 100 engenhos mecânicos e brinquedos, e a "Dioptra", que trata da engenharia usando uma forma antiga de teodolito. Sua contribuição para a matemática aplicada e a mecânica revela sua habilidade excepcional nos princípios fundamentais dessas disciplinas.

4.6 Diofanto

Diofanto de Alexandria, figura central no desenvolvimento da álgebra, exerceu significativa influência sobre estudiosos europeus da teoria dos números. A incerteza prevalece sobre sua nacionalidade e período exato de vida, estimado predominantemente no século III d.C. Seus três trabalhos notáveis são "Aritmética," do qual restaram 6 dos 13 livros, "Sobre números poligonais," preservado em fragmentos, e "Porismas," que se perdeu. A "Aritmética" é um feito genial na abordagem analítica da teoria algébrica dos números, destacando-se por resolver 130 problemas variados, levando a equações do primeiro e segundo graus. Diofanto empregava notações estenográficas e foi pioneiro em problemas algébricos indeterminados, conhecidos como problemas diofantinos, que abordam soluções racionais.

A álgebra de Diofanto, caracterizada por abreviações e uma notação única, desempenhou um papel crucial na evolução da álgebra. Sua álgebra buscava soluções sempre positivas e racionais, muitas vezes aceitando apenas uma solução. Inicialmente, a álgebra retórica envolvia a resolução de problemas em prosa, sem abreviações ou símbolos específicos. O segundo estágio, álgebra sincopada, introduziu abreviações para quantidades e operações frequentes. O último estágio, álgebra simbólica, adotou uma taquigrafia matemática com símbolos. Diofanto de Alexandria desempenhou um papel crucial ao introduzir a sincopação na álgebra grega.

4.7 Papus

Os sucessores imediatos de Euclides, como Arquimedes e Apolônio, prolongaram a tradição geométrica grega, mas esta começou a declinar. Cerca de 500 anos após Apolônio, Papus de Alexandria, um grande geômetra, buscou revitalizar o interesse pela geometria. Ele escreveu comentários sobre obras de Euclides e Ptolomeu, mas seu trabalho mais significativo foi a "Coleção Matemática". Esta obra, composta por oito livros, abordou diversos temas, incluindo métodos para lidar com números grandes, teoria das médias, extensões ao teorema de Pitágoras, astronomia, isoperimetria, entre outros.

Sobre seus oito livros é possível citar:

1. Perdido.
2. Parcialmente perdido. Ele explorou um método de Apolônio para escrever e operar números grandes.
3. Examinou a teoria das médias (inserindo médias proporcionais), tratou de desigualdades em triângulos e inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera dada.
4. Papus expandiu o teorema de Pitágoras e fez um detalhamento da espiral de Arquimedes, da conchoide de Nicomedes e da quadratriz de Dinostrato.
5. Discussão da isoperimetria, ou comparação de áreas de figuras que são limitadas por perímetros iguais e de volumes de sólidos que são limitados por áreas iguais.
6. Sobre astronomia, revisita o “Almagesto” de Ptolomeu.
7. Descreveu "O Tesouro da Análise", uma coleção crucial para matemáticos profissionais. Além de tratar de vários problemas e livros de seus antecessores.
8. Apresentou a solução de Papus para o problema de inscrever um triângulo em um círculo com lados passando por três pontos colineares, destacando-se por seu valioso registro da geometria grega.

REFERÊNCIAS[1]

[1] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2010. ISBN 85-268-0657-2. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6081521/mod_resource/content/1/%28Saunders%20Series%29%20Domingues%2C%20Hygino%20Hugueros_%20Eves%2C%20Howard%20-%20Introdu%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20hist%C3%B3ria%20da%20matem%C3%A1tica-Editora%20da%20Unicamp%20%282004_2008%29.pdf

[2] A primeira medição do Raio da terra. **ime.unicamp**, 2020. Disponível em: < https://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-primeira-medicao-do-raio-da-terra/>. Acesso em: 16 de ago. de 2023.

[3] FÉLIX KLEIN; UNIVERSITY OF MICHIGAN. **Famous Problems of Elementary Geometry: The Duplication of the Cube, the Trisection of an Angle** ... [s.l.] Ginn & Co., 1897. Disponível em <https://archive.org/details/famousproblemse00kleigoog/page/n7/mode/2up> Acesso em 10 de dez. 2023.

[4] **Doubling the Cube.** Disponível em: <http://www.takayaiwamoto.com/Greek_Math/Delian/Greek_Delian.html>. Acesso em: 10 dez. 2023.

[5] LÜTZEN, J. The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle. **Centaurus**, v. 52, n. 1, p. 4–37, fev. 2010.

[6] **Trisecting the Angle/Neusis Construction - ProofWiki.** Disponível em: <https://proofwiki.org/wiki/Trisecting_the_Angle/Neusis_Construction>. Acesso em: 10 dez. 2023.

[7] “A Educação Pitagórica.” *Ensaios E Notas*, 7 May 2018. Disponível em: ensaiosenotas.com/2018/05/07/a-educacao-pitagorica/.

[8] Bicudo, Irineu. *Os Elementos, Euclides*. 1. ed. 2009. Disponível em: https://ia601508.us.archive.org/10/items/Os.Elementos-Euclides/OsElementos-Euclides.pdf

[1] Tudo que não tiver referência indicada foi tirado da bibliografia central: [1]