História da Matemática

David Hilbert: Seu Programa e Seus Problemas

Agnessa Kling Nóbrega e Marcelo Leite Alves Wanderley

IME

USP

2023

0.1 Introdução

David Hilbert fez inúmeras contribuições significativas para a matemática como nas áreas de lógica matemática, teoria dos números e geometria. Além de suas pesquisas e suas aulas, Hilbert contribuiu também por meio de seus problemas matemáticos propostos em 1900 durante o Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, uma lista de 23 problemas fundamentais que desafiaram os matemáticos da época a resolver questões cruciais dentro da matemática. Esse conjunto de problemas ficou conhecido como os ”Problemas de Hilbert”.

Os Problemas de Hilbert abrangiam diversas áreas da matemática, como a teoria dos números, a análise matemática, a geometria, a teoria dos números transcendentais, a física matemática, entre outras. Alguns dos problemas foram resolvidos ao longo do tempo, enquanto outros permanecem abertos e continuam a inspirar pesquisas até hoje.

Outra grande contribuição de Hilbert foi através do seu programa. O programa de Hilbert visava estabelecer uma base sólida e completa para toda a matemática, fundamentando-a em princípios lógicos claros e eliminando contradições ou lacunas. Essa iniciativa foi uma resposta aos desafios apresentados pela emergente teoria dos conjuntos e pelos paradoxos que surgiram na matemática do final do século XIX.

0.2 Vida e Contribuições

0.2.1 Vida e Formação

Uma pequena cidade no Leste da Prússia chamada Konigsberg, conhecida por ser a cidade natal de Immanuel Kant, mais de um século depois também seria conhecida por ser a cidade de outro grande nome: David Hilbert. Hilbert nasceu em 1862, em uma família que havia vivido lá por várias gerações.[3]

Iniciou seus estudos aos 8 anos de idade na escola Friedrichskolleg, uma escola que tinha um enfoque maior em línguas antigas [3]. Passou seu último ano escolar no Wilhelms-Gymnasium, após isso Hilbert foi para a Universidade de Konigsberg[3]. Na universidade, conheceu grandes nomes como Hermann Minkowski, Adolf Hurwitz e Ferdinand von Lindemann, sendo este último quem sugeriu sua tese de doutorado [6].

Figura 2.1: David HIlbert.3

Como único professor titular (ordentlicher Professor) de matemática na Universidade, Lindemann foi o ”Pai-Doutor”de Hilbert e foi nessa eminente condição que ele propôs a Hilbert um problema no âmbito da teoria dos invariantes como a temática a ser abordada em sua dissertação de doutorado. Hilbert, com maestria, efetuou a resolução deste desafio, culminando na obtenção de seu doutorado no ano de 1885 (tese intitulada Über invariante Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen - Sobre as características invariantes de formas binárias especiais, em particular a função esférica harmônica [6]), marcando, assim, o início de um prolífico período de investigações no campo da teoria dos invariantes[4].

Figura 2.2: Hermann Minkowski.3

Após um período de estudos sob a tutela do professor Klein em Leipzig e posteriormente um semestre em Paris, onde teve a oportunidade de colaborar com Study, Hilbert ascendeu à posição de docente na cidade de Königsberg, no ano de 1886. Sua nomeação foi respaldada por uma notável Habilitationsschrift dedicada ao estudo da teoria dos invariantes [4]. Foi membro do corpo docente de Königsberg de 1886 a 1895, sendo Privatdozent (Privatdozent-Serve para designar professores que receberam uma habilitação (livre-docência) — reconhecimento formal de uma aptidão e autorização para exercê-la — mas que não receberam a cátedra de ensino ou de pesquisa) até 1892, depois como Professor Extraordinário por um ano antes de ser nomeado professor titular em 1893[6].

Em Berlim, conheceu Kronecker e Weierstrass, que apresentaram ao jovem Hilbert duas visões bastante diferentes do futuro. Em seguida, em Leipzig, ele finalmente conheceu Paul Gordan [6]

Hilbert passou oito dias em Göttingen antes de retornar a Königsberg. Casou-se com sua prima de segundo grau, Käthe Jerosch, em 12 de outubro de 1892; eles tiveram um filho, Franz Hilbert, nascido em 11 de agosto de 1893[6]. Em 1895, obteve o cargo de Professor de Matemática na Universidade de Göttingen por meio da intervenção de Felix Klein. Durante os anos em que Klein e Hilbert estavam em Göttingen, esta tornou-se uma instituição proeminente no mundo matemática[12].

Entre seus 69 estudantes de Ph.D. em Göttingen, muitos mais tarde se tornaram matemáticos famosos, incluindo (com data de tese): Otto Blumenthal (1898), Felix Bernstein (1901), Hermann Weyl (1908), Richard Courant (1910), Erich Hecke (1910), Hugo Steinhaus (1911) e Wilhelm Ackermann (1925)[5].

Outra pessoa de destaque na matemática e na física que cruzou o caminho de Hilbert foi Emmy Noether que em 1903-1904 estudou na Universidade de Göttingen[2]. Em 1915, foi convidada a retornar a Göttingen por David Hilbert e Felix Klein. Desejavam contratá-la, porém os membros das faculdades de história e filosofia eram contra. Eles insistiam que mulheres não podiam se tornar privatdozent. Um membro disse que era inaceitável que os soldados voltassem para a universidade e encontrassem uma mulher dando aulas[7] David Hilbert respondeu:

Não vejo como o sexo da candidata possa ser um argumento contra sua admissão como privatdozent. Além disso, estamos em uma universidade, não em uma casa de banhos[7].

Nos primeiros anos em Göttingen, Emmy Noether não ocupava um cargo oficial e não desfrutava de uma remuneração específica. Sua estadia e suprimentos acadêmicos eram suportados financeiramente por sua família. Suas aulas eram, normalmente, anunciadas sob o nome de David Hilbert, onde ela ofereceria apenas assistência[2]. Contudo, pouco tempo após sua admissão na instituição universitária, Emmy demonstrou seu notável talento ao formalizar o teorema hoje conhecido como Teorema de

Noether. Este teorema estabelece a relação entre a conservação da energia e a simetria de um sistema físico[2].

Hilbert fez contribuições significativas em todas as áreas da matemática: Até 1893, ele trabalhou em formas algébricas; de 1894 a 1899, na teoria dos números algébricos; de 1899 a 1903, nos fundamentos da geometria; e de 1904 a 1909, na análise, onde demonstrou a existência de uma solução para o problema de Dirichlet, introduziu a integral invariante na teoria de campo do cálculo de variações e, com seu tratamento das equações integrais, mudou nosso conceito de sistemas lineares. Sua introdução de espaços de produto interno completos e separáveis, agora chamados de espaços de Hilbert, preparou o terreno para o teorema de Riesz-Fischer sobre a isomorfia e isometria entre L^2 e $L^2(0,1)$ e, com isso, a resposta definitiva à questão da convergência de uma série de Fourier[15].

A partir de 1918, ele dedicou seu tempo e energia ao estudo dos fundamentos da matemática, onde acabou sendo superado por Kurt Cadel, que demonstrou, efetivamente, que o objetivo de Hilbert de construir um sistema completo e consistente era inatingível [15].

Hilbert faleceu em 14 de fevereiro de 1943 em Göttingen, Alemanha, mas seu trabalho e influência continuam a ser relevantes até os dias de hoje[3].

0.2.2 Curva de Hilbert

A Curva de Hilbert, é um exemplo concreto de uma curva que preenche completamente uma área. Ela é uma curva fractal que percorre todos os pontos de um quadrado unitário de maneira contínua e não se cruzando, ocupando assim todo o espaço do quadrado[9]. A construção dessa curva envolve a repetição de um padrão simples em diferentes escalas.

A Curva de Hilbert foi descrita em 1891 por David Hilbert, e percorre todos os pontos de um quadrado, desse modo, ela pertence a uma família das curvas de Peano. Porém, possui algumas diferenças quando comparada à de Peano. A primeira dessas diferenças é que, a cada iteração no seu processo recursivo, a curva preenche quadrados menores, mas nunca se auto interceptando. Outra característica é que seu comprimento é infinito[11]. Como as outras curvas de preenchimento de espaço, a curva de Hilbert tem dimensão do espaço que preenche.

Hilbert enunciou o seguinte princípio heurístico: Se for possível estabelecer um mapeamento contínuo do intervalo I para o quadrado Q, então, após o procedimento de subdivisão de I em quatro subintervalos congruentes e de Q em quatro subquadrados congruentes, cada um dos subintervalos resultantes pode ser mapeado de maneira contínua em um dos subquadrados correspondentes[10]. Em sequência, a subdivisão é repetida, com cada subintervalo sendo subdividido em quatro subintervalos congruentes e cada subquadrado em quatro subquadrados congruentes, e o argumento é reiterado[10]. Hilbert demonstrou que os subquadrados podem ser organizados de modo que os subintervalos adjacentes correspondam a subquadrados adjacentes com uma aresta em comum, e para que as relações de inclusão sejam preservadas, ou seja, se um quadrado corresponde a um intervalo, então seus subquadrados correspondem aos subintervalos desse intervalo[10].

Mais formalmente, podemos dizer que uma curva plana é uma aplicação contínua

$$c : I \to R^2$$

do intervalo unitário $I = [0,1]$ da reta real no plano euclidiano $R^2 = \{(x,y) : x, y \in R\}$[15]. A imagem c(I) é chamada de traço da curva c.

A produção da curva de Hilbert requer, além de retrações, rotações através de π do primeiro e $-\pi$

do último quadrado antes de serem refletidos e traduzidos em suas respectivas posições[11].

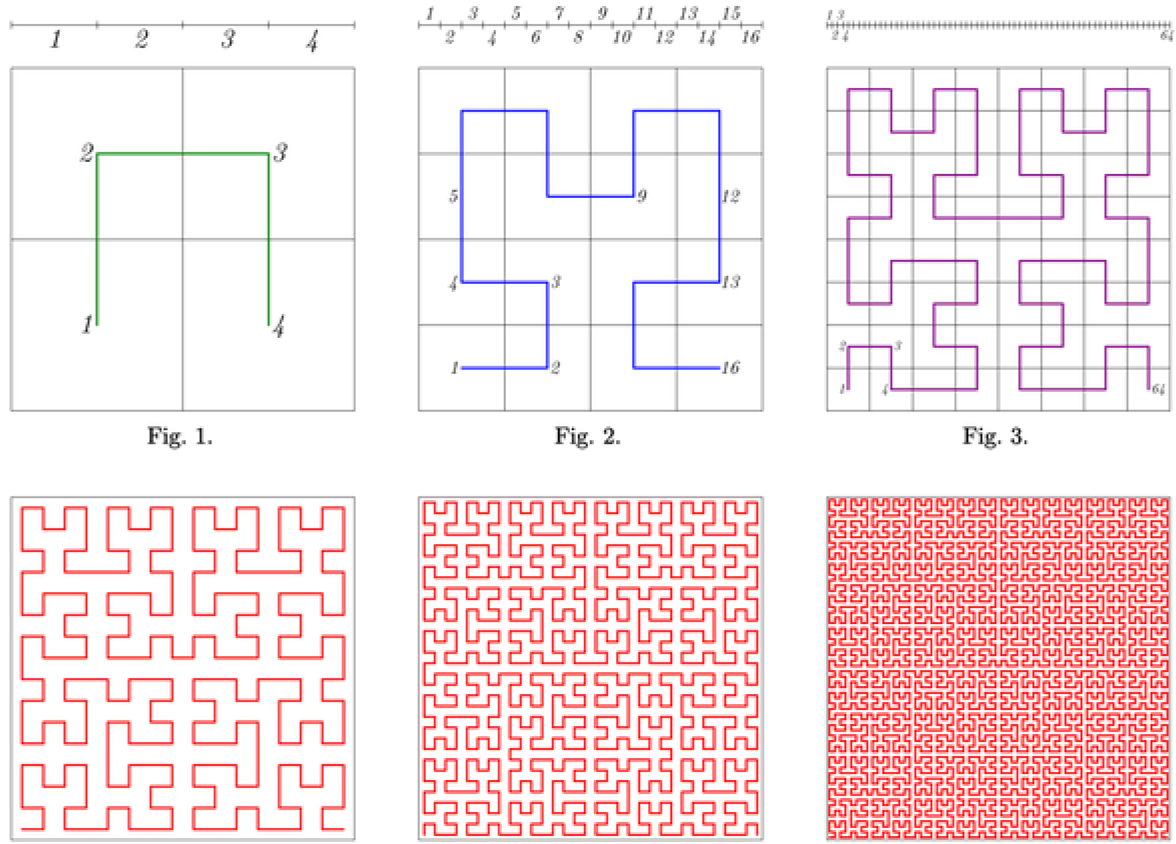

Figura 2.3: Curva de Hilbert

Como a curva de Hilbert mapeia pontos próximos do plano para pontos próximos da reta, ele é muito útil para reduzir problemas multidimensionais para problemas unidimensionais. Outra aplicação é como base de heurística para o problema do caixeiro viajante.

0.3 Problemas de Hilbert

Em uma conferência matemática em Paris no ano de 1900, o matemático alemão David Hilbert apresentou uma lista de problemas não resolvidos em matemática. No final das contas, ele apresentou 23 problemas que, em certa medida, definiram a agenda de pesquisa da matemática no século XX. Nos 120 anos desde a palestra de Hilbert, alguns dos seus problemas, normalmente referidos por números, foram resolvidos e alguns ainda estão em aberto. Os Prémios Millennium do Clay Mathematics Institute são uma versão do século XXI da proposta original de Hilbert.

São os seguintes problemas de Hilbert [14]:

1 - Problema de Cantor sobre a hipótese do Continuum (parcialmente resolvido)

2 - A não contradição dos axiomas da Aritmética (resolvido)

3 - A igualdade do volume de dois tetraedros com as mesmas áreas da base e alturas (resolvido)

4 - O problema da linha reta como a menor distância entre dois pontos (aberto)

5 - A noção de grupo contínuo de transformações de Lie sem a hipótese da diferenciabilidade das

funções definidoras dos grupos (resolvido)

6 - Tratamento matemático para os axiomas da física (aberto)

7 - Irracionalidade e transcendência de determinados números (resolvido)

8 - O problema de números primos (aberto)

9 - Prova da mais geral lei de reciprocidade em um corpo numérico qualquer (resolvido) vglue.1in
10 - A decisão sobre a resolubilidade de uma equação diofantina (resolvido)

11 - Formas quadráticas com quaisquer coeficientes numéricos algébricos (resolvido)

12 - Extensão do teorema de Kronecker sobre corpos abelianos a um domínio de racionalidade algébrica qualquer (aberto)

13 - Impossibilidade da resolução da equação geral do sétimo grau através de funções de somente 2 argumentos (resolvido)

14 - Prova da finitude de certos sistemas de funções completos (resolvido)

15 - Fundamentação rigorosa do cálculo enumerativo de Schubert (parcialmente resolvido)

16 - Problema da topologia de curvas e superfícies algébricas (parcialmente resolvido)

17 - Representação de formas definidas através de quadrados (resolvido)

18 - Construção do espaço a partir de poliedros congruentes (aberto)

19 - As soluções de problemas regulares no cálculo de variações são sempre necessariamente analíticas? (resolvido)

20 - Problemas gerais dos valores de fronteira (aberto)

21 - Demonstração da existência de equações diferenciais lineares tendo grupo monodrômico prescrito (resolvido)

22 - Uniformização de relações analíticas por meio de funções automórfas (resolvido)

23 - Mais desenvolvimento dos métodos do cálculo de variações (aberto)

Nas próximas seções serão apresentados os ferramentais para o entendimento do primeiro problema assim como as duas tentativas parciais de demonstração.

0.3.1 Conjunto das Partes - Cardinalidade

O conjunto das partes de um conjunto A ($\mathcal{P}(A)$) é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos do conjunto A, incluindo o conjunto vazio a o próprio conjunto A.

Como exemplo, seja $A = \{a, b, c\}$ o conjunto formado por 3 elementos a, b, c. Os subconjuntos possíveis são:

$$\{\};$$
$$\{a\};$$
$$\{b\};$$
$$\{c\};$$
$$\{a, b\};$$
$$\{b, c\};$$
$$\{c, a\};$$
$$\{a, b, c\}.$$

Dessa forma, $\mathcal{P}(A) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\}\}$.

A cardinalidade ($|\,|$) de um conjunto é o número de elementos do conjunto. No caso no exemplo do conjunto A, $|A| = 3$ e no caso do conjunto $\mathcal{P}(A)$, $|\mathcal{P}(A)| = 3$.

A cardinalidade de um conjunto A qualquer com n elementos é dada por $|A| = 2^n$ (a demonstração é por indução em n)[13].

0.3.2 Cardinalidade de Q

Um conjunto X é dito enumerável, se existe uma bijeção $f : N \to X$.

Dessa forma podemos enunciar os seguintes teoremas:[8]

(i) O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável;

(ii) O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável;

(iii) O conjunto Q é enumerável.

O objetivo agora é mostrar que existe uma bijeção entre $Z \to Q$.

Inicialmente, lembrar que qualquer inteiro positivo n pode ser escrito de forma única como $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ sendo que p_i é um número primo e $a_i, ..., a_k$ inteiros não negativos. Analogamente qualquer racional q pode ser escrito de forma única como $q = \frac{p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}}{p_1^{b_1} p_2^{b_2} ..., p_l^{p_l}} = p_1^{c_1} p_2^{c_2} ... p_t^{c_t}$ em que $b_j, ..., b_p$ são inteiros positivos e $p_1, ..., p_t$ são inteiros.

Seja a função $s : N \cup \{0\} \to Z$ dada por:

$$s(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor.$$

facilmente podemos identificar que $s(0) = 0$, $s(1) = -1$, $s(2) = 1$, $s(3) = -2$, ..., gerando Z e que a função $s(n)$ é uma bijeção.

Para cada $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k} \in Z^+$, definindo a função $h_+ : Z^+ \to Q^+$ por:

$$h_+(n) = p_1^{s(a_1)} p_2^{s(a_2)} ... p_k^{s(a_k)}$$

pode ser provado que é uma bijeção (a composição de bijeções é uma bijeção).

Como existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$, Z e Q podemos concluir (Teorema de Cantor[1]) que os conjuntos tem a mesma cardinalidade.

0.3.3 Cardinalidade de $(0,1)$ e R

Seja a função $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$, definida por:

$$f(A) = 0.x_1 x_2 x_3 .... x_n ....$$
$$x_i = 1 \iff i \in A$$
$$x_i = 0 \iff i \notin A$$
$$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Exemplos:

$$A = \{2, 5, 6, 9, 10\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \implies f(A) = 0.0100110011000000...00000...$$

;

$$A = \mathbb{N} \implies f(A) = 0.111111111...11111...$$

Finalmente, seja $r \in (0,1)$, $r = 0.x_1x_2x_3...x_n....$, com $x_i \in \{0,1\}$. Como $r \neq 0$, não é possível ter todos os $x_i = 0$.

A função definida acima é uma bijeção.

$f(A)$ é uma injeção

Seja $f(A_1) = f(A_2)$, logo

$$0.x_1x_2....x_n... = 0.y_1y_2....y_n...$$

e portanto $x_i = y_i$ para $\forall i \in N$.

Com isso temos que $i \in A_1 \implies x_i = 1 \implies y_i = 1 \implies i \in A_2 \implies A_1 \subseteq A_2$. Por um argumento similar, podemos mostrar que $A_2 \subseteq A_1$. Logo $A_1 = A_2$.

$f(A)$ é uma sobrejeção

Seja $r \in (0,1)$, com $r = 0.x_1x_2...x_n...$ e o conjunto $A = \{i \in N; x_i = 1\}$.

Logo, pela definição da função, $f(A) = r$ e portanto sobrejetora.

Cardinalidade de (0,1)

Como existe uma bijeção entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e (0,1) podemos concluir (Teorema de Cantor[1]) que os conjuntos tem a mesma cardinalidade e usando a notação $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, temos que:

$$|(0,1)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Cardinalidade de $\mathbb{R}$

Notar que a função $f : (0,1)R$ descrita por:

$$f(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$$

é uma bijeção com sua inversa dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{\arctan(f(x))}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Portanto $|(0,1)| = |R| =\aleph_1$

0.3.4 Ordem de Cardinalidades - N, Z, Q, R

Finalmente,

$$|N| = |Z| = |Q| = \aleph_0 < |R| = \aleph_1.$$

Alguns conjuntos possuem cardinalidade maior que $\aleph_1$ como por exemplo o conjunto $\mathcal{P}(R)$ que tem cardinalidade $2^{\aleph_1}$

0.3.5 Primeiro Problema de Hilbert

O primeiro problema de Hilbert afirma que a cardinalidade de R ($|R|$) é o segundo número de aleph ($\aleph_1$) ou de forma alternativa (negando a afirmação),

$$\nexists A : \aleph_0 < |A| < \aleph_1.$$

O primeiro problema de Hilbert é comumente denomonado hipótese do contínuo (HC ou CH em inglês).

0.3.6 ZFC

A teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel, ou pela abreviação ZFC (com o axioma da escolha), é um sistema axiomático usado para definir formalmente a teoria dos conjuntos (e, portanto, a matemática em geral).

Especificamente, ZFC é uma coleção de aproximadamente 9 axiomas (dependendo da convenção e da formulação precisa) que, em conjunto, definem o núcleo da matemática através do uso da teoria dos conjuntos. Mais formalmente, ZFC é uma lógica de predicados equipada com uma relação binária.

A crítica comum é que o ZFC é muito fraco quando comparado a outros sistemas axiomáticos. Por exemplo, a hipótese do contínuo (juntamente com um punhado de outros problemas) pode ser demonstrada como independente do ZFC, o que significa que não pode ser provada nem refutada com os axiomas fornecidos. Assim, alguns optam por adotar várias extensões do ZFC, ou sistemas intimamente relacionados, como ZF+AD - onde o axioma da escolha é substituído pelo axioma da determinação.

0.3.7 Demonstração de Godel

Godel demonstrou que não há nenhuma contradição da hipótese do contínuo com a teoria axiomática de conjuntos ZFC, ou seja, a hipótese do contúnuo não pode ser refutada tendo como base a teoria aximática ZFC (Hipótese do continuo independente de ZFC).

0.3.8 Demonstração de Cohen

Paul Cohen usando uma técnica denominada *forcing* (obteve medalha Fields por esse trabalho) demonstrou que não existe contradição caso a negação da hipótese do contínuo fosse acrescentada a teoria axiomática de conjunto ZFC.

0.3.9 Considerações Finais - Primeiro Problema de Hilbert

As demonstrações de Godel e Cohen, comprovam que a validade da hipótese do contínuo depende da teoria axiomática de conjuntos que está sendo adotada e portando indecidível.

0.4 Programa de Hilbert

O Programa de Hilbert foi um esforço significativo iniciado pelo matemático alemão David Hilbert no início do século XX. Seu objetivo era formalizar a matemática estabelecendo um conjunto de axiomas e regras que pudessem fornecer uma base rigorosa para toda a matemática. Os principais objetivos do Programa de Hilbert eram:

Completude: Demonstrar que toda a matemática é consistente, o que significa que não há contradições, e que todas as afirmações matemáticas verdadeiras podem ser provadas.

Consistência: Para garantir que os axiomas da matemática estejam livres de contradições.

Decidibilidade: Para mostrar que um método pode ser concebido para decidir a verdade ou falsidade de qualquer afirmação matemática.

Este programa foi uma tentativa de colocar a matemática em uma base lógica e sólida, usando lógica formal e sistemas axiomáticos. No entanto, os teoremas da incompletude de Gödel, propostos por Kurt Gödel na década de 1930, provaram que o Programa de Hilbert, tal como originalmente concebido, não poderia ser totalmente alcançado. Gödel mostrou que dentro de qualquer sistema axiomático consistente que seja suficientemente poderoso para abranger a aritmética, sempre haverá afirmações verdadeiras que não podem ser provadas dentro desse sistema.

Embora os resultados de Gödel apresentassem limitações aos objetivos ambiciosos de Hilbert, o Programa de Hilbert ainda influenciou significativamente o desenvolvimento da lógica matemática e a compreensão dos fundamentos da matemática.

Os Teoremas da Incompletude de Gödel, desenvolvidos pelo lógico Kurt Gödel, são dois resultados inovadores na lógica matemática que transformaram fundamentalmente a compreensão dos sistemas formais e suas limitações. Os teoremas são:

Primeiro Teorema da Incompletude: Este teorema estabelece que em qualquer sistema formal que seja suficientemente complexo para abranger a aritmética, existirão afirmações que são verdadeiras, mas não podem ser provadas dentro desse sistema. Em essência, nenhum sistema formal consistente pode provar todas as afirmações verdadeiras sobre os números naturais.

Segundo Teorema da Incompletude: Este teorema baseia-se no primeiro e demonstra que nenhum sistema formal consistente pode provar a sua própria consistência. Em termos mais simples, se um sistema for consistente, não poderá demonstrar essa consistência utilizando apenas os recursos desse sistema.

Estes teoremas desafiaram as ideias apresentadas pelo programa de David Hilbert, que visava estabelecer um conjunto completo e consistente de axiomas para toda a matemática. O trabalho de Gödel mostrou que qualquer sistema formal suficientemente complexo para abranger a aritmética terá inevitavelmente afirmações que são verdadeiras, mas não podem ser provadas dentro do próprio sistema. Além disso, um sistema não pode demonstrar a sua própria consistência sem recorrer a métodos externos mais fortes.

Esses teoremas tiveram um impacto profundo na matemática, na lógica e na filosofia. Eles demonstraram as limitações inerentes aos sistemas formais e levantaram questões sobre o alcance e os limites do raciocínio matemático. O trabalho de Gödel alterou fundamentalmente a nossa compreensão dos fundamentos da matemática e da natureza dos sistemas formais.

0.5 Considerações Finais

O fato de ninguém ter refutado a Hipótese do Continuum é um exemplo de que ainda hoje não desenvolvemos teoria matemática matemática suficiente (Cédric Villani).

Figura 5.1: Cédric Villani e Marcelo Leite Wanderley - UFRJ 2012

Bibliografia

[1] Encyclopaedia Britannica. *Cantor's theorem*. URL: https://www.britannica.com/science/Cantors-theorem. (acesso em 30.10.2023).

[2] Auguste Dick. *Emmy Noether*. Birkhauser, 1981.

[3] Jeremy j. Gray. *The Hilbert Chalange*. Oxford University Press, NY, 2000.

[4] T. Hawkins. *The Gottingen School of Hilbert*. Springer, New York, N.Y., 2000.

[5] David Hilbert. *The Mathematics Genealogy Project*.

[6] Math History. *Biographies - Hilbert*. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/. (acesso em 25.08.2023).

[7] Clark Kimberling. *Emmy Noether, Mentor Colleagues*. (acesso em 14.09.2023).

[8] Elon L. Lima. *Análise Real - vol. 1 - Funções de uma Variável*. Impa, 2020. ISBN: 978-65-990528-5-9.

[9] Raquel S. R. Nunes. "Geometrial Fractal e Aplicações". Em: *Faculdade de Ciências da Universidade do Porto - Departamento de Matemática Pura* (2006).

[10] Hans Sagan. *Space-filling curves*. Springer, 1994.

[11] Rogério da Silva Paixão. "O ensino de fractais no Ensino Fundamental". Em: *Universidade Estadual de Maringá* (2014).

[12] Jeff Suzuki. *Mathematics in Historical Context*. Mathematical Association of America, 2009. ISBN: 978-0-88385-570-6.

[13] The University of Utah. *The size of a finite power set*. URL: https://www.math.utah.edu/~alfeld/math/sets/powerproof.html.

[14] B. Yandell. *The Honor´s Class: Hilbert´s Problems and their Solvers*. CRC Press, 2002.

[15] Richard Zach. "Hilbert's Program Then and Now". Em: *Filosofia da Matemática* (2003).