

FERNANDO BOAVENTURA MOTTA 10771500  
JOÃO VINICIUS HENNINGS DE LARA 10771740  
NATHAN DALEFFI RODRIGUES RAYES 10772585  
PEDRO PIRES SULZER 10705940

**PME 3380 - MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS**  
**T0**



Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury  
Prof. Dr. Decio Crisol Donha  
São Paulo

2020

# 1 Introdução

## 1.1 Tema e importância

O tema a ser introduzido nessa primeira parte do trabalho semestral é o estudo do comportamento dinâmico de um drone quadrrirrotor, um veículo aéreo não tripulado (VANT ou UAV) que apresenta 6 graus de liberdade. Tal tema foi escolhido tendo em vista que no mercado de transportes, vigilância e entretenimento atual há importância crescente da utilização de soluções cada vez mais rápidas e compactas.

Dentro desse tema serão ressaltadas principalmente maneiras de criar respostas mais rápidas a estímulos externos não previstos, essencialmente correntes de ar consideravelmente fortes que possam atrapalhar o deslocamento do quadrrirrotor, levando a uma consequente desestabilização de sua carga, desvio de rota ideal e até colisões.

## 1.2 Objetivo

O objetivo do estudo de veículos quadrrirrotores como o drone comercial é criar um modelo matemático que descreve o movimento do mesmo dadas suas propriedades físicas e certas condições de voo. Isto é, busca-se determinar as equações diferenciais ordinárias que regem o movimento desse objeto.

Nesse caso serão estudados os movimentos angulares de *roll* (rolagem), *pitch* (arfagem) e *yaw* (guinada) do drone, assim como os movimentos de translação de seu centro de massa. A relevância de fatores estruturais e geométricos desse veículo será destacada na construção do modelo físico. Os conceitos utilizados nesse projeto são: as equação de Newton-Euler ou Lagrange, conceitos de mecânica como matrizes de inércia e rotação, ferramentas básicas de cálculo diferencial para conseguir as expressões finais, dentre outras.

Outro objetivo deste trabalho é conseguir criar hipóteses e simplificações que tornem o nosso modelo em algo mais fácil de descrever e, posteriormente, simular numericamente em softwares computacionais científicos como o *scilab* ou o *matlab*.

# 2 Modelo

Para o estudo em questão, será modelado um quadrrirrotor simétrico com comportamento de corpo rígido. O veículo possui quatro "braços" de comprimento  $l$ , cada um com um motor e hélices em sua extremidade. Devido à simetria do veículo, considera-se que toda a sua massa  $m$  está concentrada no centro do veículo. As hélices rotacionam em sentidos opostos dois a dois e impõe, cada uma, uma força e um momento no quadrrirrotor.

Através das equações de dinâmica (Newton- Euler) foi possível obter as seguintes equações não linearizadas para uma primeira análise de como será feita a linearização nas próximas etapas deste projeto:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_z (\cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi) \\ m\ddot{y} = F_z (\cos\phi \sin\theta \cos\psi - \sin\phi \cos\psi) \\ m\ddot{z} = F_z (\cos\phi \cos\theta) - mg \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} J_{xx}\ddot{\phi} = (J_{yy} - J_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi} - J_r\dot{\theta} + T_\phi \\ J_{yy}\ddot{\theta} = (J_{zz} - J_{xx})\dot{\phi}\dot{\psi} - J_r\dot{\phi} + T_\theta \\ J_{zz}\ddot{\psi} = (J_{xx} - J_{yy})\dot{\phi}\dot{\theta} + T_\psi \end{cases} \quad (2)$$

A linearização das equações acima é de sexta ordem no espaço de estados a seguir:

$$X = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ \theta \ \dot{\theta} \ \phi \ \dot{\phi} \ \psi \ \dot{\psi}]^T \quad (3)$$

Nas expressões acima o termo  $F_z$  representa a sustentação total gerada pelos quatro rotores do drone na direção  $z$  apresentada (essa força será modelada na próxima parte deste trabalho), os termos  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$  e  $J_{zz}$  representam os momentos de inércia do quadricóptero em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , o termo  $J_r$  é o momento de inércia de cada hélice e os termos  $T_i$  representam os momentos gerados nos rotores em torno dos ângulos  $\theta$ ,  $\phi$  ou  $\psi$  (estes ângulos de Euler apresentados estão representados a seguir), :

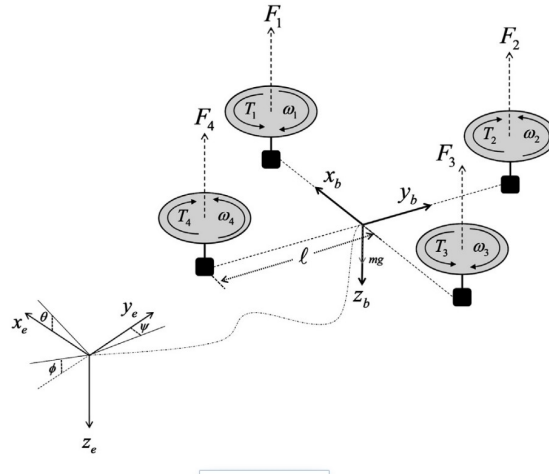


Figura 1 – Esquema do drone (Universidad Autónoma de Nuevo León, 2017)

As forças externas agindo no veículo são a força peso, a força de reação dos propulsores e uma força devido a perturbações aerodinâmicas. Já os momentos externos são o momento de reação dos propulsores, um momento devido à precessão dos propulsores e um momento devido a perturbações aerodinâmicas.

As forças e momentos devido a propulsões aerodinâmicas podem ser usadas para modelar vento ou efeitos como o *ground effect* (efeito solo). Nesse estudo, por ser um primeiro modelo, tais termos não serão considerados. Vale destacar que o quadricóptero modelado não será modelado um de acrobacias.

## 2.1 Hipóteses simplificadoras

Algumas hipóteses são necessárias para simplificar e viabilizar a modelagem. Além da simetria do quadrirrotor e o comportamento de corpo rígido, faz-se, então, quatro hipóteses principais.

- A velocidade do ar livre é nula. Implica a inexistência de vento. É uma hipótese restritiva, mas necessária para um primeiro modelo, de modo que estudos futuros podem usar este primeiro como base para modelos mais sofisticados;
- As hélices também são rígidas. Deformação das hélices é desprezível;
- A dinâmica dos motores é rápida e o tempo de resposta pode ser considerado como imediato;
- A resistência do ar (arrasto) é desprezada. Simplifica significativamente o modelo e é razoável dado o baixo perfil aerodinâmico do veículo e as baixas velocidades translacionais (abaixo de 30 km/h).

## 3 Revisão Bibliográfica

- AMEZQUITA-BROOKS, Luis; LICEAGA-CASTRO, Eduardo; GONZALEZ-SANCHEZ, Mario; GARCIASALAZAR, Octavio; MARTINEZ-VAZQUEZ, Daniel. **Towards a standard design model for quad-rotors: a review of current models, their accuracy and a novel simplified model**. 2017. 23 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica e Elétrica, Centro de Investigación e Innovación En Ingeniería Aeronautica, Universidad Autónoma de Nuevo León, Apodaca, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2017.09.001>> Acesso em: 04 out. 2020.
  - Introduz uma modelagem genérica para quadricópteros usando Newton-Euler considerando-o um corpo rígido e usando um referencial local e um fixo. Deduz, então, um sistema compacto, com relação a único referencial inercial. Apresenta então, vários modelos simplificados para o sistema físico do quadricóptero, discutidos em outros artigos. Propõe, em seguida, um novo modelo, razoavelmente simples e com boa acuracidade, segundo os autores, e o compara com modelos anteriores e com dados experimentais.
- CHAMSEDDINE, Abbas; ZHANG, Youmin; RABBATH, Camille Alain. **Flatness-based trajectory planning for a quadrotor Unmanned Aerial Vehicle test-bed considering actuator and system constraints**. 2012. 6 f. Curso de Engenharia, Concordia University, Montreal, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACC.2012.6315362>> Acesso em: 04 out. 2020.

- Mostra o comportamento do drone dadas certas condições de voo e entradas dos atuadores para mantê-lo em movimento plano e previsto.
- CHAMSEDDINE, Abbas; ZHANG, Youmin; RABBATH, Camille Alain; JOIN, Cédric; THEILLOL, Didier. **Flatness-Based Trajectory Planning/Replanning for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle**. 2012. 17 f. Curso de Engenharia Mecânica, Department Of Mechanical Industrial Engineering, Concordia University, Montreal, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAES.2012.6324664>> Acesso em: 04 out. 2020.
  - Aborda a questão da definição da rota de um quadrotor como um problema de otimização baseado em economia de combustível e diminuição do tempo de percurso. Também aborda uma maneira mais eficiente de lidar com falhas nos atuadores, considerando não só o retorno a rota ideal mas também o replanejamento da rota. Além disso contém um conjunto de equações que irá auxiliar a modelagem futura.
- CHAMSEDDINE, Abbas; ZHANG, Youmin; RABBATH, Camille Alain. **Trajectory Planning and Replanning Strategies Applied to a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle**. 2012. 5 f. Curso de Engenharia, Concordia University, Montreal, 2012. o vídeo
  - Apresenta estratégias de planejamento e replanejamento de voo, baseada em diferentes restrições: as condições de envelope do quadricóptero, representadas pelo ângulo de rolagem e de arfagem; e os limites dos atuadores, representado pelo empuxo máximo de cada atuador. Além disso, disponibiliza e explica o modelo matemático utilizado no estudo.
- AMOOZGAR, Mohammad Hadi; CHAMSEDDINE, Abbas; ZHANG, Youmin. **Fault-Tolerant Fuzzy Gain-Scheduled PID for a Quadrotor Helicopter Test-bed in the Presence of Actuator Faults**. 2012. 6 f. Curso de Engenharia, Concordia University, Montreal, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.3182/20120328-3-IT-3014.00048>> Acesso em: 04 out. 2020.
  - Mostra o estudo de dois diferentes tipos de falhas dos atuadores de um quadrotor quando há perda de eficácia do controle de um único atuador ou de todos os atuadores, Além disso ele também propõe um novo modelo de Controlador proporcional integral derivativo que é comparado com sua versão mais tradicional, comprovando sua eficácia.

## 4 Próximos Passos

Os artigos aqui apresentados devem ser estudados mais a fundo, para maior compreensão e desenvolvimento do modelo do quadricóptero. As equações diferenciais do movimento devem ser obtidas e linearizadas para simplificação e simulação do modelo no ambiente *Scilab*.