

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA – DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

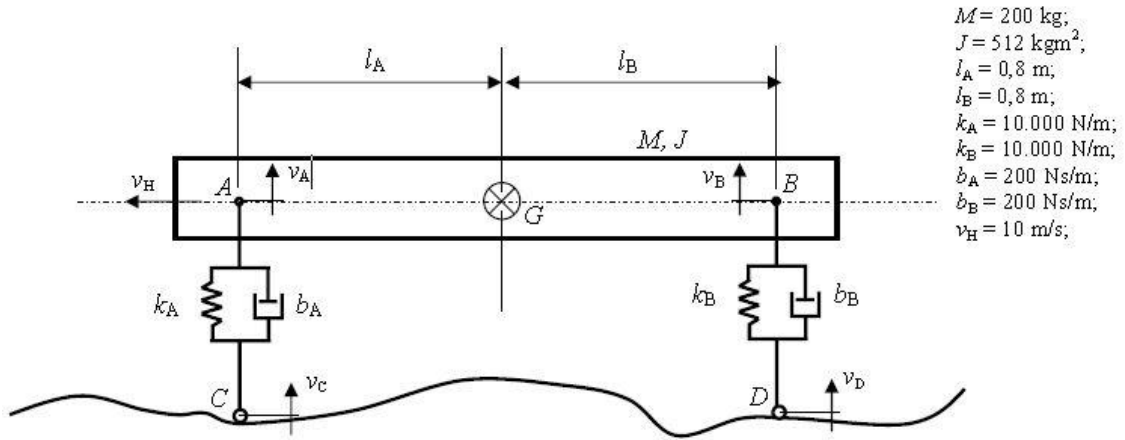
PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

## **Lista 7**

Pedro Leonel Giannoni de Oliveira  
Número USP: 10335569

São Paulo  
2020

## EXERCÍCIO 1



Modelo matemático:

**TMB**

$$M\ddot{x}_G = (k_A x_A - k_B x_B) - (b_A [\dot{x}_G - \dot{x}_C - \dot{\theta} l_A] + b_B [\dot{x}_G - \dot{x}_D - \dot{\theta} l_B])$$

**TMQM**

$$J\ddot{\theta} = (k_A x_A l_A - k_B x_B l_B) + (b_A l_A [\dot{x}_G - \dot{x}_C - \dot{\theta} l_A] - b_B l_B [\dot{x}_G - \dot{x}_D + \dot{\theta} l_B])$$

Sendo a representação na forma de espaço de estados dada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ v_G \\ \omega \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}$$

Obtém-se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ k_A/M & -k_B/M & -(b_A + b_B)/M & (b_A l_A + b_B l_B)/M \\ k_A l_A/J & -k_B l_B/J & (b_A l_A - b_B l_B)/J & -(b_A l_A^2 + b_B l_B^2)/J \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ b_A/M & b_B/M \\ -b_A l_A/J & b_B l_B/J \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Caso 1: Obtenção do modelo de 1 / 2 Veículo

O primeiro caso a ser simulado é de uma entrada do tipo degrau e dadas as condições iniciais:

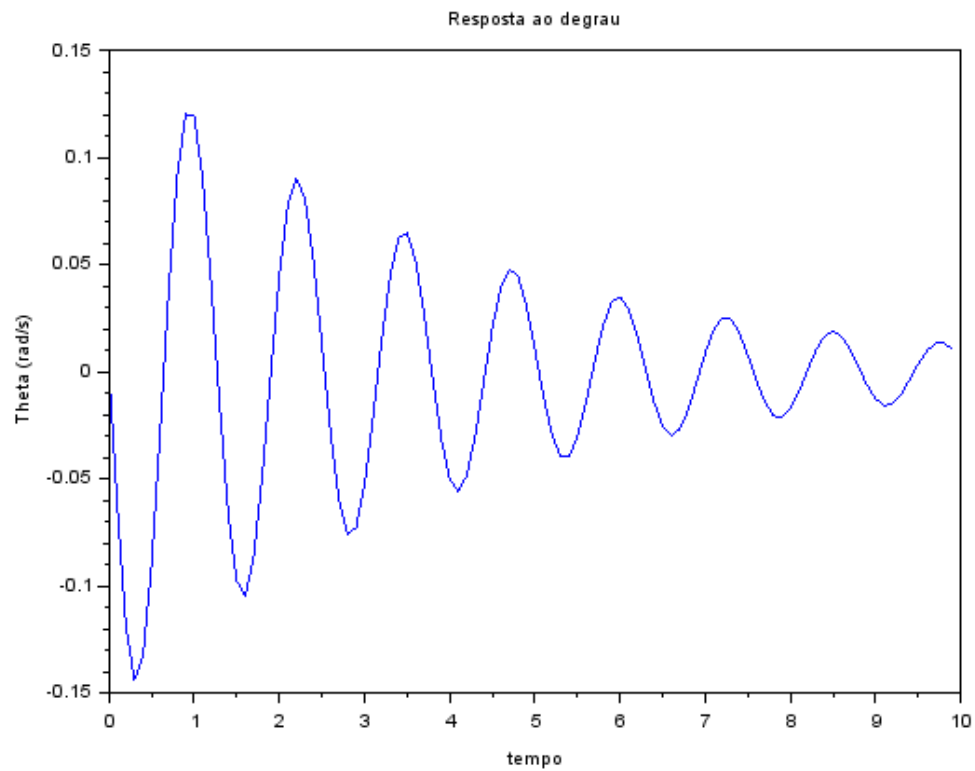
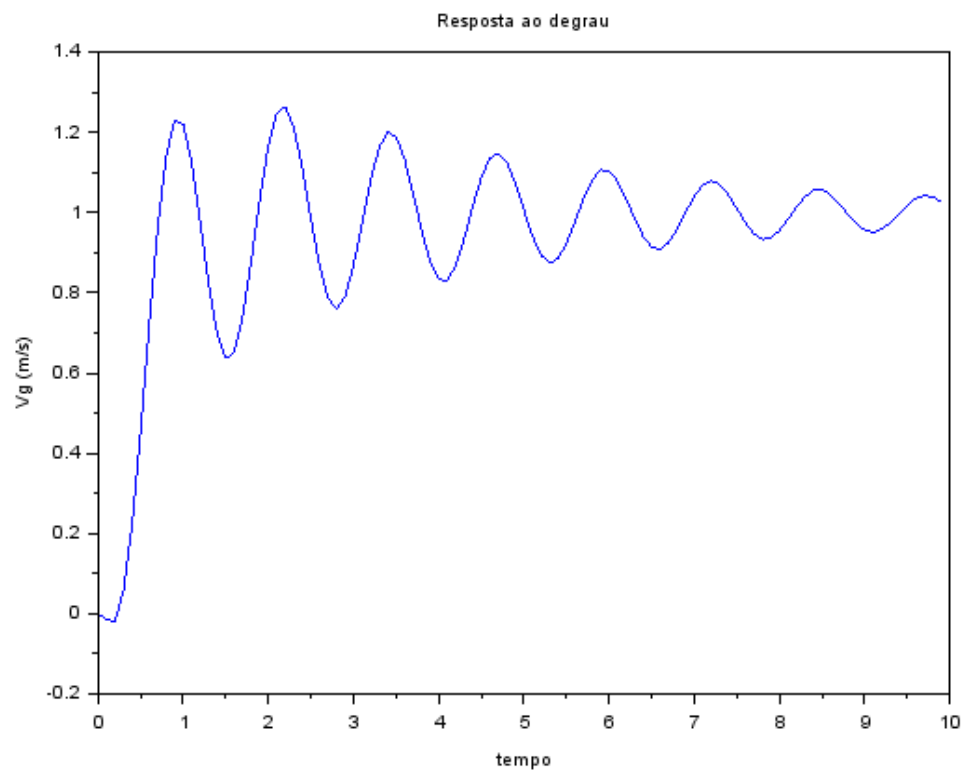
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix} \quad v_C = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

$$v_D = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_d \\ 1 & \text{se } t \geq t_d \end{cases}$$

Sendo

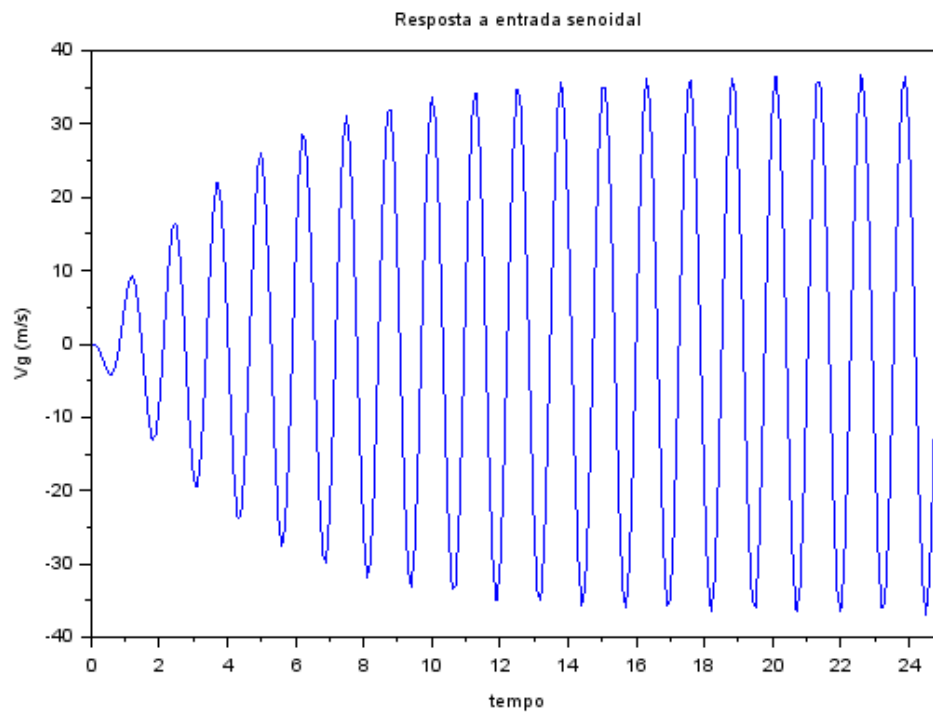
$$t_d = (l_A + l_B)/v_H = 0,16 \text{ s}$$

O gráfico para a simulação de um degrau é mostrado abaixo. Como requisita a explicação, o obstáculo físico representado por tal entrada é um aclime constante positivo como numa subida com inclinação fixa. A entrada em  $v_D$  ocorre após  $t_d$ , pois é esse o tempo necessário para a roda traseira alcançar o obstáculo após percorrido o comprimento da distância entre as rodas. A simulação para tal entrada é mostrada a seguir.

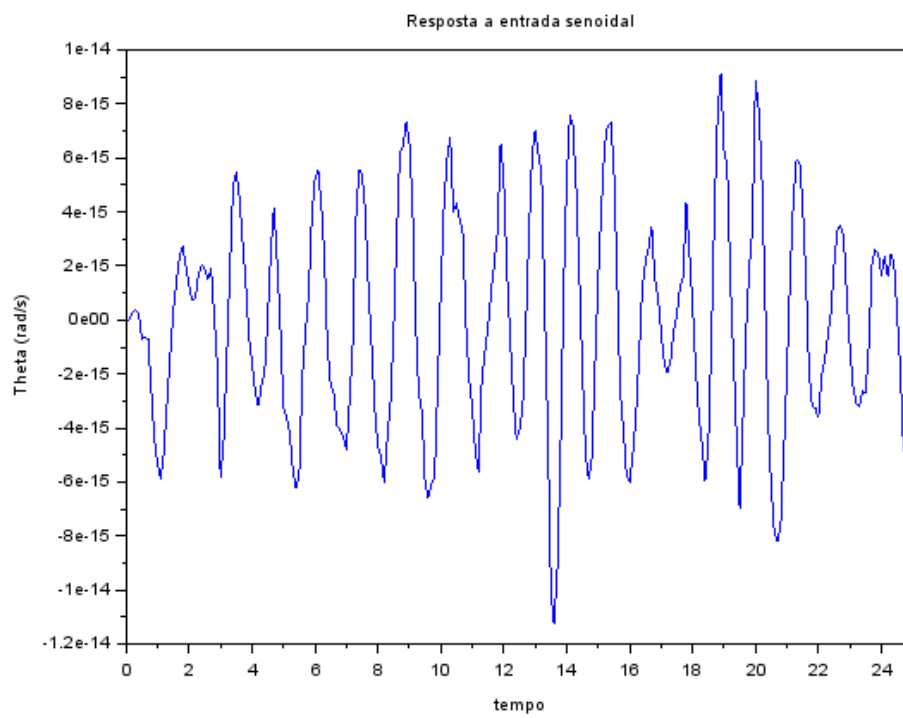


Para as entradas senoidais, temos:

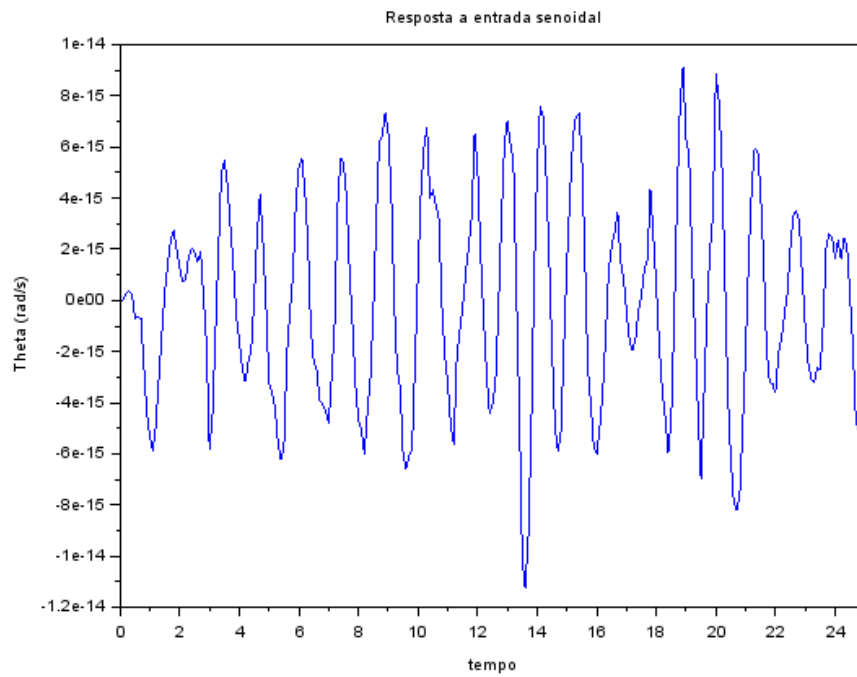
- $vc = vd = \text{sen}(9,8895 * t)$ 
  - $V_g$



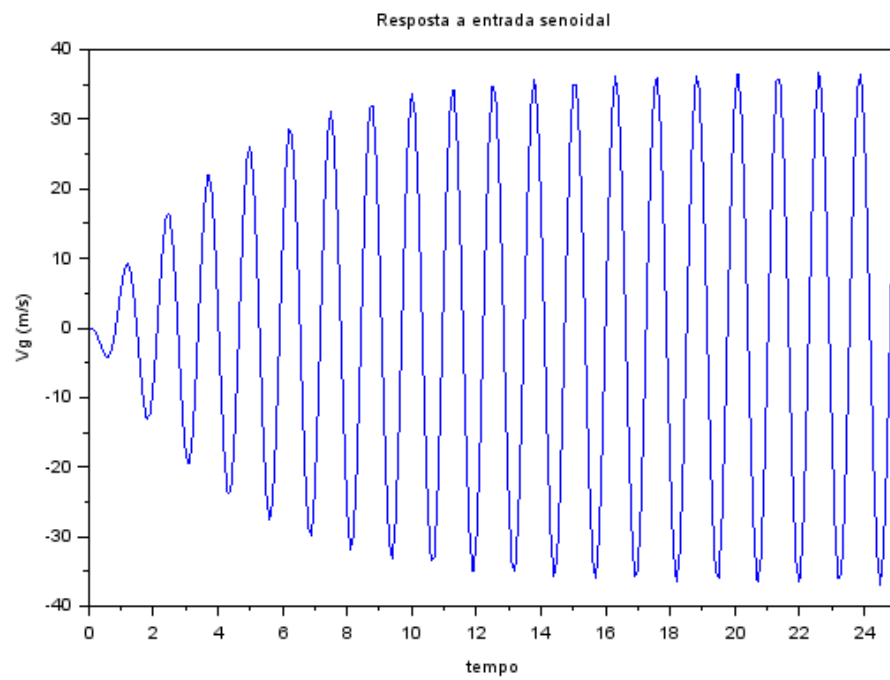
- $\omega$



- $vc = -vd = \text{sen}(4,9875 * t)$ 
  - $V_g$



- $\omega$



Pode-se observar nos gráficos acima que há uma inversão no perfil do gráfico para os dois casos, com a velocidade do baricentro e a velocidade angular invertendo seus papéis do caso anterior e mantidas as amplitudes idênticas. Observa-se que no primeiro caso para  $\omega$  e no segundo caso para  $v_g$  os valores no eixo vertical são muito pequenos, de forma que são na verdade nulos e a aparente variação é devido a erros numéricos do Scilab.

Ao encontrarmos as frequências de ressonância, encontramos as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez:

$$M = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 512 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_a + k_b & k_b l_b - k_a l_a \\ k_b l_b - k_a l_a & k_b l_b^2 + k_a l_a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 12800 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_a + b_b & b_b l_b - b_a l_a \\ b_b l_b - b_a l_a & b_b l_b^2 + b_a l_a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix}$$

Devido ao fato de as molas e amortecedores serem simétricos e as duas rodas estarem simétricas em relação ao centro de gravidade, as matrizes de rigidez e amortecimento são diagonais.

Assim, é possível calcular a frequência natural de vibração e o coeficiente de amortecimento:

$$\zeta_1 = \frac{c_1}{2w_1 m_1} = \frac{400}{2 * 10 * 200} = 0,1$$

$$\zeta_2 = \frac{c_2}{2w_2 m_2} = \frac{256}{2 * 5 * 512} = 0,05$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{20000}{200}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{12800}{512}} = 5 \text{ rad/s}$$

Com esses valores, temos ainda:

$$w_{d1} = w_1 \sqrt{1 - \zeta_1^2} = 10 \sqrt{1 - 0,1^2} = 9,95 \text{ rad/s}$$

$$w_{d2} = w_2 \sqrt{1 - \zeta_2^2} = 5 \sqrt{1 - 0,05^2} = 4,993746 \text{ rad/s}$$

- **Análise de resposta em frequência**

Utilizou-se a função ss2ft do Scilab para obter a função de transferência do sistema. Considerando que há 2 entradas e 2 saídas, as 4 funções de transferência são mostradas a seguir.

$$TF_1 = \frac{50 + s}{100 + 2s + s^2}$$

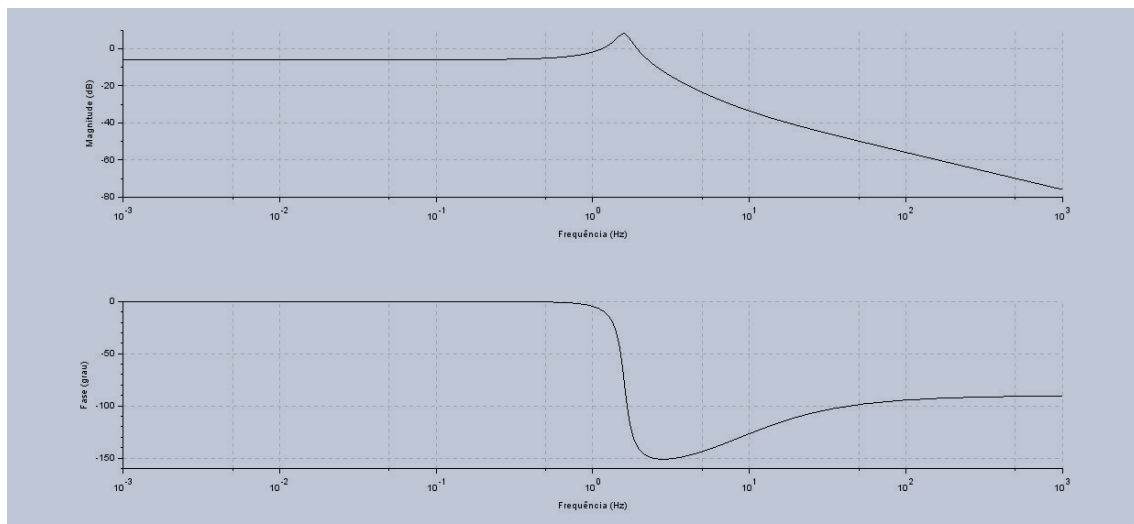
$$TF_2 = \frac{50 + s}{100 + 2s + s^2}$$

$$TF_3 = \frac{-(15.625 - 0.3125s)}{25 + 0.5s + s^2}$$

$$TF_4 = \frac{15.625 - 0.3125s}{25 + 0.5s + s^2}$$

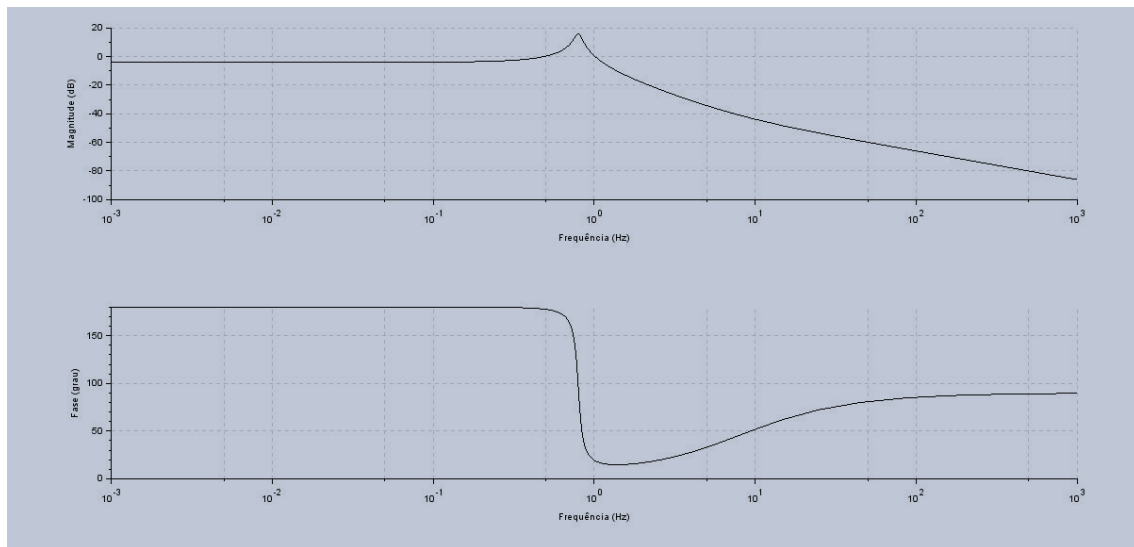
A simetria do sistema faz com que as duas primeiras FT's sejam iguais e as duas ultimas sejam opostas. A partir da função de transferência e ainda usando o Scilab, obtemos os diagramas de bode.

- Diagramas de Bode com a mesma suspensão para entrada e saída





- Diagrama de Bode com suspensão distinta para entrada e saída



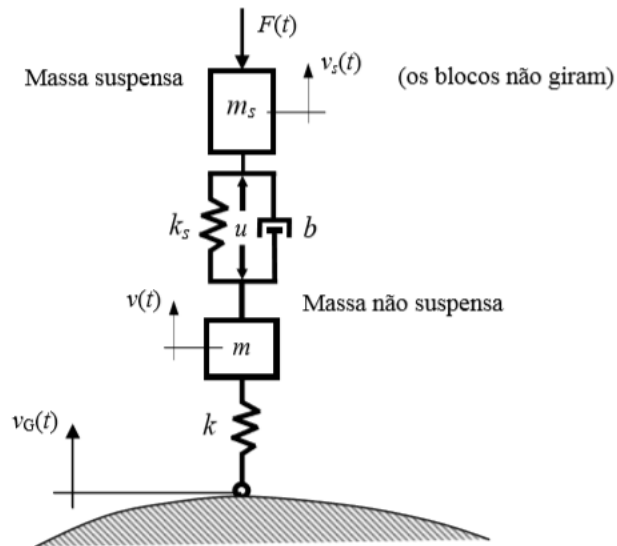
Dos diagramas, percebe-se que, para  $v_g$ , a frequência natural ocorre em torno de  $10 \text{ rad/s}$  devido ao pico verificado para esse valor. Ainda, esse ocorre quando as oscilações estão em fase.

Já para  $\omega$ , a frequência natural ocorre em torno de  $5 \text{ rad/s}$ , conforme observado nos gráficos. E esta ocorre quando as solicitações  $x_d$  e  $v_d$  estão com  $180$  graus de fase.

- **Simulação de Sistema não linear**

- **Exercício**

Nesse problema será estudado um sistema de  $1/4$  de carro, afim de tratar a não linearidade de uma mola. O sistema pode ser visto na figura a seguir.



Seja:

Variáveis:

- $v(t)$  : velocidade vertical da massa não suspensa  $m$ .
- $v_s(t)$  : velocidade vertical da massa suspensa  $m_s$ .
- $x(t)$  : coordenada vertical da massa não suspensa  $m$ .
- $x_s(t)$  : coordenada vertical da massa não suspensa  $m$ .
- $v_g(t)$  : velocidade vertical do ponto de veículo em contato com solo.
- $x_g(t)$  : coordenada vertical do solo.
- $F(t)$  : Força aplicada na massa suspensa.
- $u(t)$  : Saturação de entrada entre as massas

Parâmetros:

- $m_s$  : massa suspensa.
- $m$  : massa não suspensa
- $k_M$  : rigidez da mola entre a massa e o batente
- $K_s$  : Rigidez da mola entre as massas
- $k_B$  : rigidez do batente.
- $b$  : constante do amortecimento.
- $l$  : comprimento natural da mola.
- $l_C$  : comprimento da mola totalmente comprimida.

As equações diferenciais do sistema são:

$$\dot{x} = v \quad \dot{x}_g = v_g \quad \dot{x}_s = v_s$$

As demais equações diferenciais variam segundo a deformação da mola. Considerando que a mola não está fixa ao solo, ela pode estar comprimida, ou então sem contato com o chão. Ainda no caso de compressão, a deflexão pode suficientemente grande para que o batente seja atingido. Logo, o problema se divide em:

- Não há contato com o solo:

Nesse caso  $l$  é o comprimento natural da mola, de forma que a condição é dada por  $x - x_g > l$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg - k_s(x - x_s - l) - u - b(v - v_s) \\ m\dot{v}_s &= -m_s g + k_s(x - x_s - l) + b(v - v_s) - F + u \end{aligned}$$

- Existe contato com o solo, mas ainda não se atingiu o batente:

Define-se  $l_c$  como o comprimento da mola totalmente comprimida, logo há uma condição de:  $l_c < x - x_g < l$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -F_{mola} - F_{amortecedor} - mg - k_s(x - x_s - l) - u - b(v - v_s) \\ m\dot{v}_s &= -m_s g + k_s(x - x_s - l) + b(v - v_s) - F + u \end{aligned}$$

- Existe contato com o solo e atingiu-se o batente:

Ainda sendo  $l_c$  o comprimento da mola totalmente comprimida, temos a condição de  $x - x_g < l_c$ . Assim:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -F_{batente} - F_{amortecedor} - mg - k_s(x - x_s - l) - u - b(v - v_s) \\ m\dot{v}_s &= -m_s g + k_s(x - x_s - l) + b(v - v_s) - F + u \end{aligned}$$

Sabendo que:

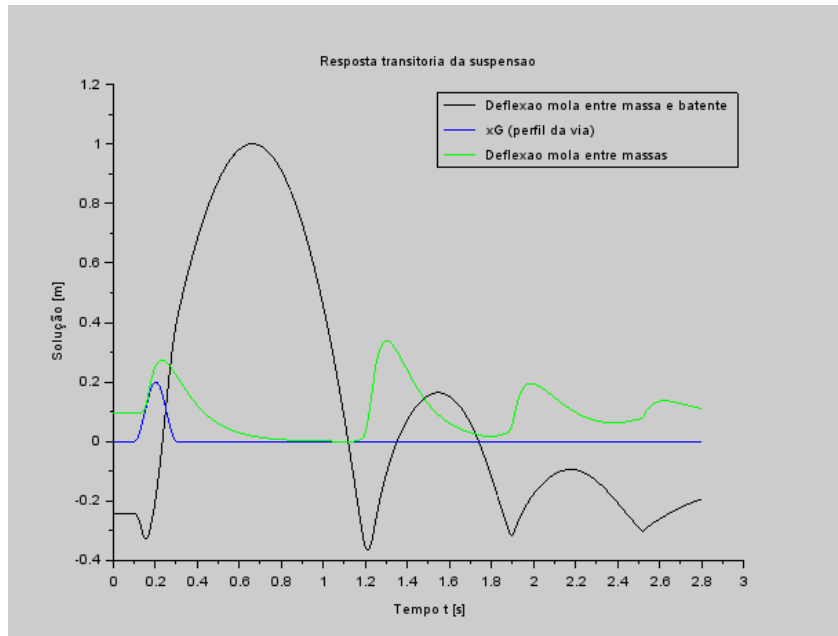
$$F_{mola} = k_m(x - x_g - l) \quad F_{batente} = k_b(x - x_g - l) \quad F_{amortecedor} = b(v - v_g)$$

Definimos os vetores de estado como sendo:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ x_g \\ v \\ x_s \\ v_s \end{bmatrix} \quad entrada = \begin{bmatrix} v_g \\ F \\ u \end{bmatrix}$$

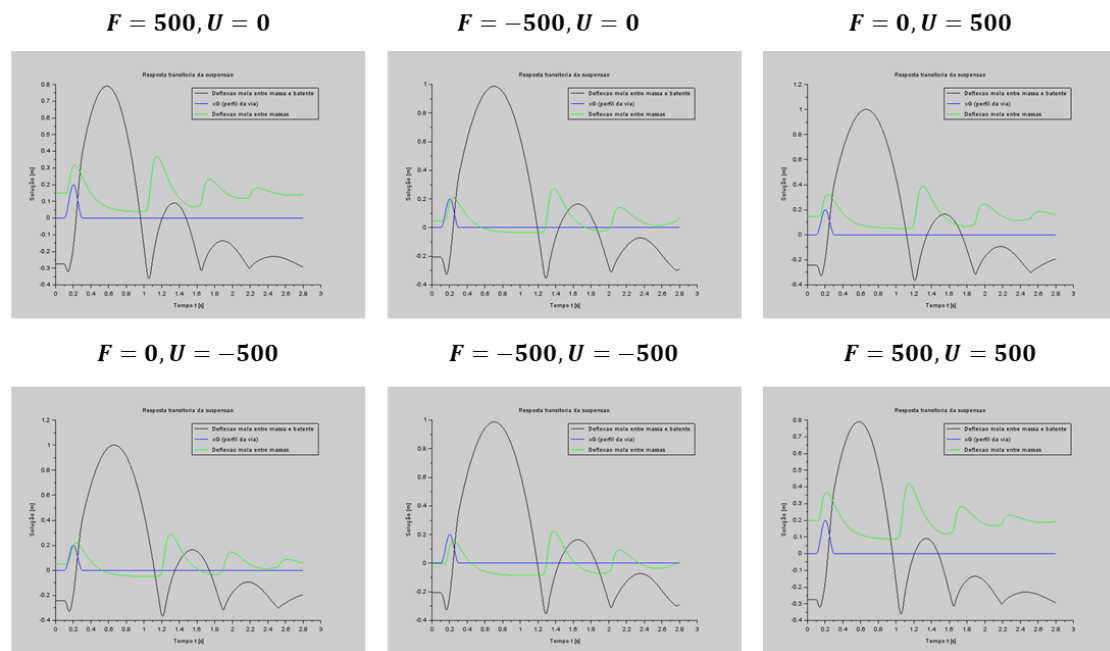
Realizando a simulação do modelo no Scilab, pode-se obter os diferentes efeitos que a saturação e a força tem sobre o comportamento. Dividiu-se em alguns casos, como pode ser visto a seguir.

- $F = U = 0$ ;



Através da análise do gráfico gerado, e comparando-se com o modelo apresentado no exemplo, observa-se que a deflexão da suspensão primária atinge valores menores que  $-0,3m$ , fazendo com que o veículo tenha, após um período de tempo, altas deflexões na suspensão primária, atingindo até  $1m$ . Percebe-se também que o sistema demora um tempo maior para estabilizar.

Observe a imagem a seguir, que representa alguns casos variando força e saturação.



Os gráficos evidenciam que a atuação de uma força entre ambas as massas gera variação na deflexão da mola. Aumentando  $F$ , percebe-se que o módulo de deflexão de ambas tendem a aumentar. Diminuindo  $F$ , o inverso ocorre. Para a saturação, percebe-se que não há um efeito perceptível sobre a mola entre massa e batente, apenas sobre a mola entre as massas, em que o aumento de  $U$  gera aumento da deflexão.

Ao mesmo tempo, aumentando  $F$  o tempo para retomar o equilíbrio se torna menor, como era de se esperar, assim como sua diminuição faz com que o retorno ao equilíbrio ocorra mais rapidamente. Para  $U$ , o mesmo comportamento não é observado. A atuação de ambas as forças simultaneamente não gera efeitos extras além dos causados pelas forças individualmente.

- **Código Scilab**

```
clear all
clc

//Parametros do sistema
M=200;
J=512;
la=0.8;
lb=0.8;
ka=10000;
kb=10000;
ba=200;
bb=200;
vh=10;
td=(la+lb)/vh;

//Matrizes do sistema
A=[0,0,1,-la;0,0,1,lb;ka/M,-kb/M,-(ba+bb)/M,(bb*lb+ba*la)/M;ka*la/J,-kb*lb/J,(-bb*lb+ba*la)/J,-(bb*lb^2+ba*la^2)/J];
B=[-1 0;0 -1;ba/M bb/M;-ba*la/J bb*lb/J];
C=[0,0,1,0;0,0,0,1];
D=[0,0;0,0];
x0=[0 0 0 0];

//Entrada Degrau
dt=0.1;
u=ones(2,10/dt);
for t=0:dt:td-dt,
    u(2,(t/dt)+1)=0;
end

t=0:0.1:10-dt;
xo=[0 0 0 0]';
meiocarro=syslin('c',A, B, C, D);
[y,x]=csim(u,t,meiocarro,xo);

vg = x(3,:)
thetap = x(4,:)

//Plotagem dos gráficos
scf(1)
xtitle('Resposta ao degrau', 'tempo', 'Vg (m/s)')
plot(t,vg, 2)

scf(2)
xtitle('Resposta ao degrau', 'tempo', 'Theta (rad/s)')
plot(t,thetap, 2)

//Entrada Senoidal
i=1
for t2 = 0:0.1:25
    u_2(1,i) = sin(9.8995*t2);
    u_2(2,i) = sin(9.8995*t2);
    u_3(1,i) = sin(4.9875*t2);
    u_3(2,i) = -sin(4.9875*t2);
    i = i+1
end
```

```

t2=0:0.1:25;

xo=[0 0 0 0]';
meiocarro=syslin('c',A, B, C, D);
[y2,x2]=csim(u_2,t2,meiocarro,xo);
[y3,x3]=csim(u_3,t2,meiocarro,xo);

vg2 = x2(3,:);
thetap2 = x2(4,:);

vg3 = x3(3,:);
thetap3 = x3(4,:);

//Plotagem dos gráficos
//Em fase
scf(3)
xtitle('Resposta a entrada senoidal', 'tempo', 'Vg (m/s)')
plot(t2,vg2, 2)

scf(4)
xtitle('Resposta a entrada senoidal', 'tempo', 'Theta (rad/s)')
plot(t2,thetap2, 2)

//Oposição de fase
scf(5)
xtitle('Resposta a entrada senoidal', 'tempo', 'Vg (m/s)')
plot(t2,vg3, 2)

scf(6)
xtitle('Resposta a entrada senoidal', 'tempo', 'Theta (rad/s)')
plot(t2,thetap3, 2)

//Análise em frequência
states = {'xa'; 'xb'; 'vg'; 'w'};
inputs = {'xc'; 'xd'; 'vc'; 'vd'};
outputs = {'vg'; 'w'};
meiocarro=syslin("c",A,B,C,D)
H = ss2tf(meioscarro)
print('H',H)
scf(7)
bode(H)

//Exercicio
function [xdot]=sistema(t, x, entrada)
    entradas=entrada(t);

    if (x(1)-x(2))<lc then
        xdot=[x(3);entradas(1);(-kB*(x(1)-x(2))-l-m*g+entradas(3)-ks*(x(1)-x(4))-b*(x(3)-x(5)))/m;x(5);(-entradas(2)+ks*(x(1)-x(4))-l+b*(x(3)-x(5))-ms*g-entradas(3))/ms];
    elseif (x(1)-x(2))>l then
        xdot=[x(3);entradas(1);-g+entradas(3)/m-ks/m*(x(1)-x(4))-b/m*(x(3)-x(5));x(5);(-entradas(2)+ks*(x(1)-x(4))-l+b*(x(3)-x(5))-ms*g-entradas(3))/ms];
    else
        xdot=[x(3);entradas(1);(-kM*(x(1)-x(2))-l-m*g+entradas(3)-ks*(x(1)-x(4))-b*(x(3)-x(5)))/m;x(5);(-entradas(2)+ks*(x(1)-x(4))-l+b*(x(3)-x(5))-ms*g-entradas(3))/ms];
    end
    return xdot
endfunction

```

```

// Definicao da funcao que implementa a entrada vG:
function [ut]=entrada(t)
global F u
F=000;
u=000;
if t<ti then
    ut=[0,F,u];
elseif t<=(ti+LB/vc) then
    ut=[(hB*2*%pi*vc/(2*LB))*sin((vc*2*%pi/LB)*(t-ti)),F,u];
else
    ut=[0,F,u];
end
return ut
endfunction

// Definicao do arquivo que implementa a simulacao:
clear all
// Definir os valores dos parametros
m=250;    // massa [kg]
ms=100;
ks=10000;
b=1885;    // constante de amortecimento [Ns/m]
g=9.8;    // aceleracao da gravidade [m/s2]
kM=14213;    // rigidez da mola [N/m]
kB=142130;    // rigidez do batente [N/m]
l=0.4;    // comprimento natural da mola [m]
lc=0.1;    // comprimento da mola totalmente comprimida [m]
hB=0.2;    // altura da lombada [m]
LB=2;    // comprimento da lombada [m]
ti=0.1;    // tempo percorrido ate atingir a lombada [s]
vch=35;    // velocidade do carro [km/h]
vc=vch/3.6;    // velocidade do carro [m/s]
x0=[0.000001+l-((m+ms)*g+F+u)/kM;0;0;0.0000001-(F+ms*g+u)/ks-((m+ms)*g+F+u)/kM;0]; //
condicoes iniciais
// O valor l-((m+ms)*g+F+u)/kM reflete a posicao de equilibrio da suspensao quando apenas o peso
esta atuando.
// O valor -(F+ms*g+u)/ks-((m+ms)*g+F+u)/kM reflete a posicao de equilibrio da suspensao
secundaria quando apenas o peso esta atuando
t0=0;    // instante inicial
t=0:0.001:100;    // vetor de tempo
x=ode(x0,t0,t,list(sistema,entrada));

// Plotando a diferenca entre a coordenada da massa e a coordenada
// do solo menos o comprimento natural da mola (deflexao):
figure(1)
plot2d(t,x(1,:)-x(2,:)-l)

// Plotando xG:
plot2d(t,x(2,:),2)
//Plotando a deformacao da segunda mola
plot2d(t,x(1,:)-x(4,:)-l,3)

// Usando a variavel do tipo 'lista':
T=list("Resposta transitoria da suspensao","Tempo t [s]","Solucao [m]","Deflexao mola entre massa
e batente","xG (perfil da via)","Deflexao mola entre massas");
// Colocando uma legenda na parte superior esquerda da figura (parametro 4):
legends([T(4),T(5),T(6)],1,2,3,1);
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:

```



```
xtitle(T(1),T(2),T(3));
```