

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos



Lista G

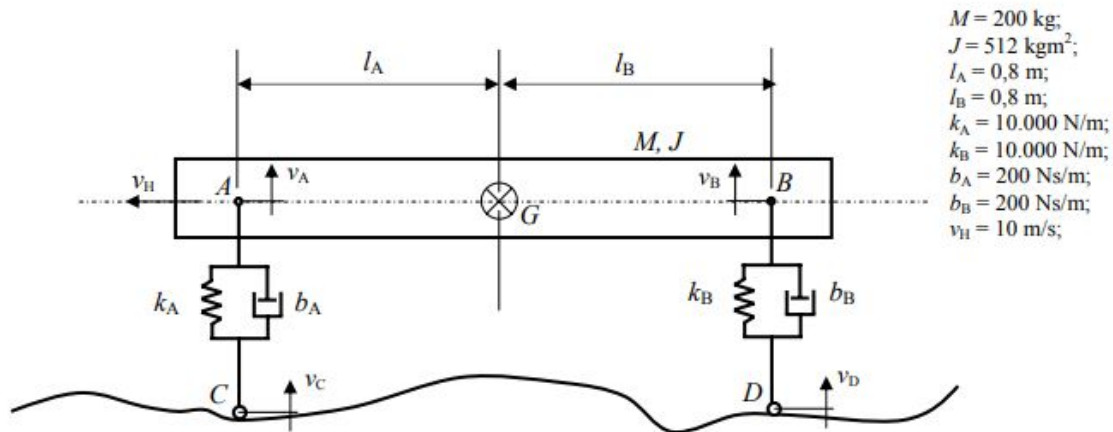
Leonardo Faria de Oliveira – 10706131

Prof. Agenor de Toledo Fleury

Prof. Decio Crisol Donha

São Paulo, 3 de Dezembro de 2020

1. OBTENHA O MODELO DE 1/2 CARRO



Dadas as hipóteses simplificadoras presentes no enunciado, foi feita a obtenção do modelo matemático a punho, estando essa reproduzida a seguir:

Figura 1 - Modelagem matemática

Inicialmente, aplico-se o TMB:

$$\vec{F}^R = M \cdot \vec{a}_G^0 = -K_A (x_A - x_C) - K_B (x_B - x_D) - b_A (\dot{x}_A - \dot{x}_C) - b_B (\dot{x}_B - \dot{x}_D)$$

$$\Rightarrow \dot{V}_G = \frac{1}{M} [-K_A (x_A - x_C) - K_B (x_B - x_D) - b_A (\dot{x}_A - \dot{x}_C) - b_B (\dot{x}_B - \dot{x}_D)]$$

Logo, da cinemática, vem que: (nendo o ângulo de giro do C.M. em \hat{z})

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (\vec{A} - \vec{G}) \\ \dot{x}_A \hat{i} &= \dot{v}_G \hat{j} + \omega \hat{k} \wedge (-l_A \cos \alpha \hat{i} - l_A \sin \alpha \hat{j}) \\ \Rightarrow \dot{x}_A &= \dot{v}_G - \omega l_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{G}) \\ \dot{x}_B \hat{i} &= \dot{v}_G \hat{j} + \omega \hat{k} \wedge (l_B \cos \alpha \hat{i} + l_B \sin \alpha \hat{j}) \\ \Rightarrow \dot{x}_B &= \dot{v}_G + \omega l_B \end{aligned}$$

Finalmente, aplico-se o TMM: (no polo G)

$$\vec{M}^{\text{red}} = \vec{S} \cdot \vec{\omega} = l_A K_A (x_A - x_C) + l_B K_B (x_B - x_D) + l_A b_A (\dot{x}_A - \dot{x}_C) + l_B b_B (\dot{x}_B - \dot{x}_D)$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} = \frac{1}{J} [l_A (K_A (x_A - x_C) + b_A (\dot{x}_A - \dot{x}_C)) + l_B (K_B (x_B - x_D) + b_B (\dot{x}_B - \dot{x}_D))]$$

Escrevendo matricialmente - em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \\ \dot{V}_G \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -l_A \\ 0 & 0 & 1 & l_B \\ -\frac{K_A}{M} & -\frac{K_B}{M} & \frac{-b_A - b_B}{M} & \frac{l_A b_A - l_B b_B}{M} \\ \frac{l_A K_A}{J} & -\frac{l_B K_B}{J} & \frac{l_A b_A - l_B b_B}{J} & \frac{-b_A l_A^2 - b_B l_B^2}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ V_G \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_A}{M} & \frac{K_B}{M} & \frac{b_A}{M} & \frac{b_B}{M} \\ -\frac{l_A K_A}{J} & \frac{l_B K_B}{J} & -\frac{l_A b_A}{J} & \frac{l_B b_B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ x_D \\ \dot{x}_C \\ \dot{x}_D \end{bmatrix}$$

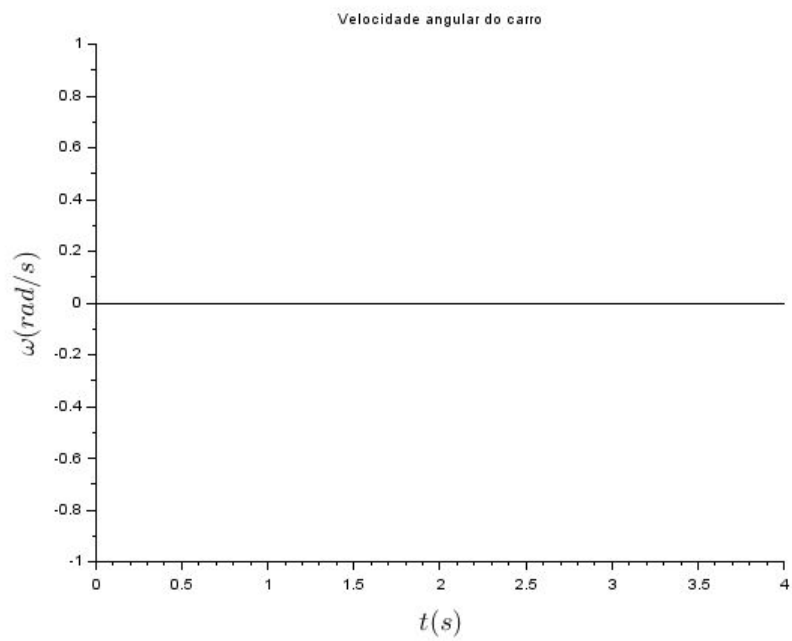
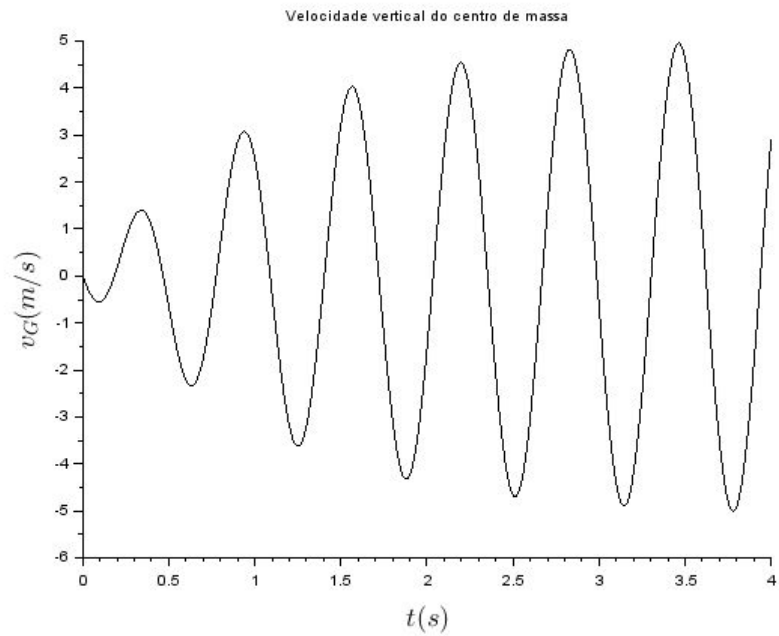
$$\begin{bmatrix} V_G \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ V_G \\ \omega \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ x_D \\ \dot{x}_C \\ \dot{x}_D \end{bmatrix}$$

2. SIMULAÇÃO DO MODELO DE $\frac{1}{2}$ CARRO

Agora, foram pedidas análises acerca dos autovalores da matriz A , calculada anteriormente, das raízes da função de transferência e da coincidência de alguns resultados, sendo todos esses mostrados a seguir:

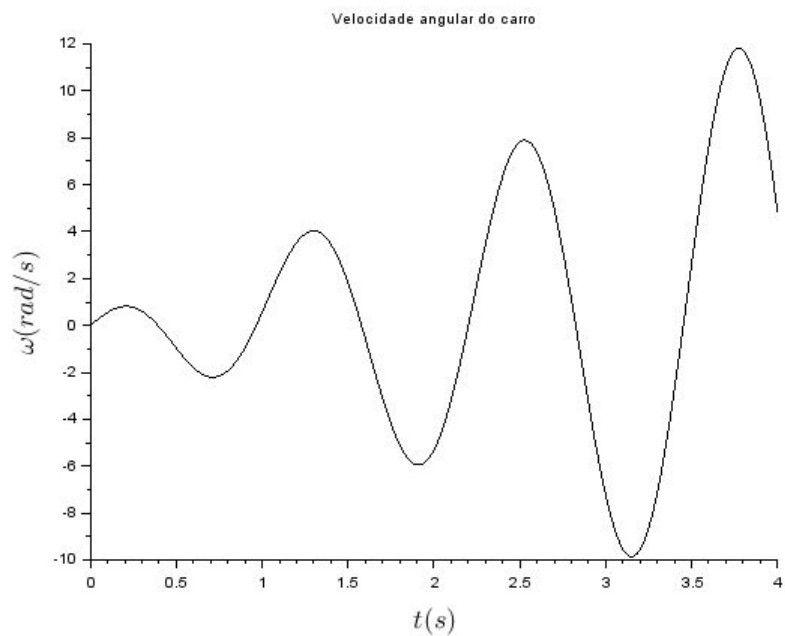
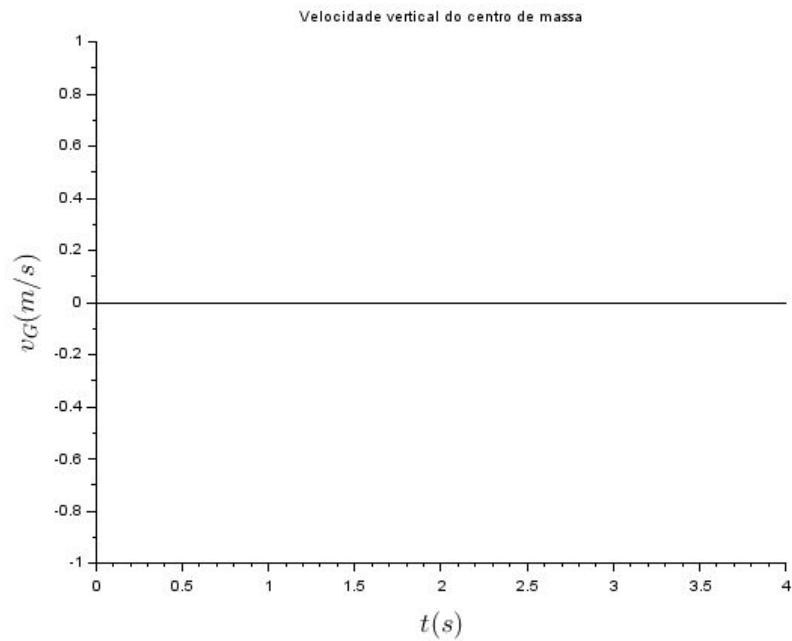
- Para o primeiro cenário pedido, o de força degrau. não conseguiu-se realizar uma simulação efetiva, resultando sempre num erro que não pôde ser solucionado.

- $v_C = v_D = \text{sen}(9,8995t)$



Observa-se que a entrada escolhida foi tal que a velocidade angular do carro permanece constante em 0, enquanto a velocidade vertical do centro de massa evolui oscilatoriamente no tempo, aumentando sua amplitude. Fisicamente, isso indica o carro subindo ao mesmo tempo com as duas rodas

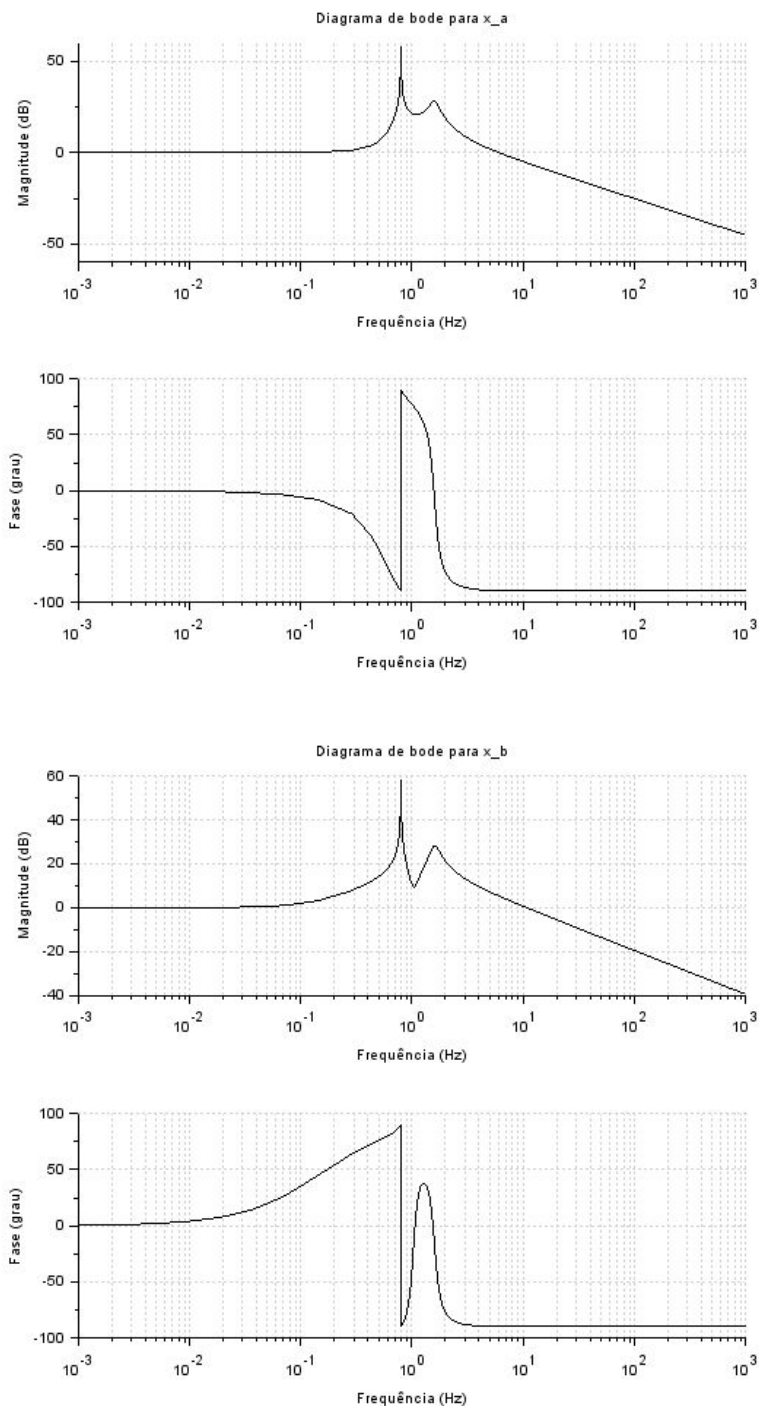
- $v_C = -v_D = \sin(4,9875t)$

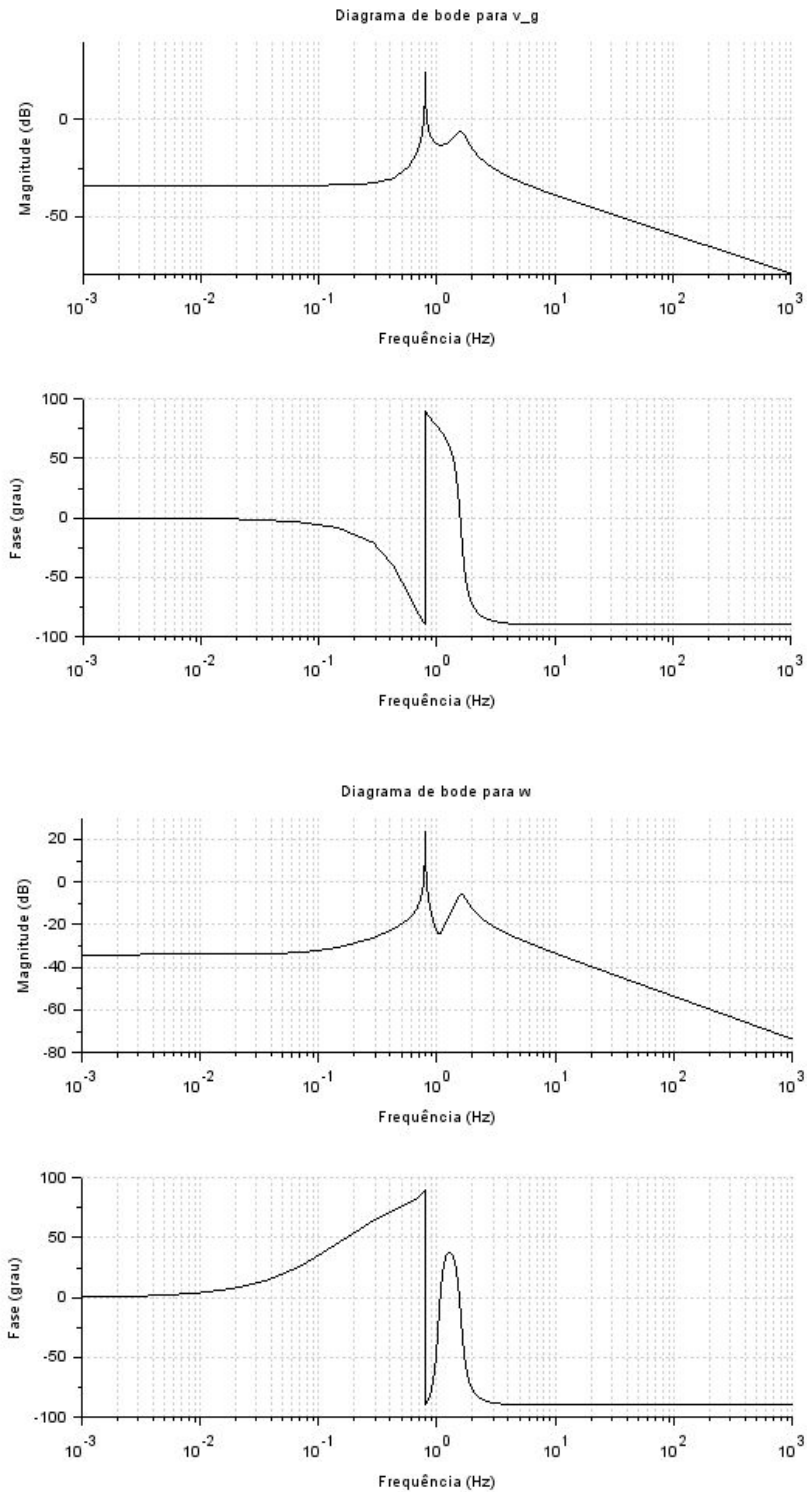


Dessa vez, o comportamento inverso ocorre. A entrada é tal que o centro de massa permanece parado na vertical, porém há velocidade angular no carro, também evoluindo com o tempo e aumentando em amplitude, porém com uma frequência menor. Fisicamente, isso indica um movimento do tipo “uma roda sobe exatamente simetricamente à descida da outra” no que diz ao par frontal/traseiro.

3. ANÁLISE DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Numericamente, segundo a forma como mostrado no código ao final do relatório, foram determinados os diagramas de bode para o presente sistema, sendo eles todos mostrados na sequência.





Observando o comportamento de todos os diagramas de bode, percebe-se que o sistema tem duas frequência de ressonância para todas as variáveis de estado, sendo a “mais forte” em cerca de 0,8 Hz e a outra, “mais fraca”, de 1,1 Hz

5. CÓDIGO UTILIZADO

O seguinte código foi desenvolvido em Scilab para resolução da lista.

```
clear

//Definição dos parâmetros
M = 200.; //Massa do sistema [kg]
J = 512.; //Inercia do sistema [kg*m^2]
L_A = 0.8; //"Comprimento frontal" [m]
L_B = 0.8; //"Comprimento traseiro" [m]
K_A = 10000.; //Constante da mola frontal [N/m]
K_B = 10000.; //Constante da mola traseira [N/m]
B_A = 200.; //Constante do amortecedor frontal [N*s/m]
B_B = 200.; //Constante do amortecedor traseiro [N*s/m]
V_H = 10.; //Velocidade horizontal [m/s]

//Definição das matrizes A, B, C e D
A = [0 0 1 -L_A; 0 0 1 L_B; -K_A/M -K_B/M (-B_A-B_B)/M (L_A*B_A-L_B*B_B)/M; L_A*K_A/J -L_B*K_B/J
(L_A*B_A-L_B*B_B)/J (L_A^2*B_A-L_B^2*B_B)/J];
B = [0 0 0 0; 0 0 0 0; K_A/M K_B/M B_A/M B_B/M; -L_A*K_A/J L_B*K_B/J -L_A*B_A/J L_B*B_B/J];

//Condições iniciais
x_A0 = 0.; //[m]
x_B0 = 0.; //[m]
v_G0 = 0.; //[m/s]
omega0 = 0.; //[rad/s]

//Criação do vetor de tempo
step = 0.01;
t_inicial = 0.;
t_final = 4.;
t = t_inicial:step:t_final;

//Definição do vetor de estados e e solução do sistema

function funcao=entrada1(t)
    funcao = -cos(9.8995*t)/9.8995
endfunction
function funcao=entrada2(t)
    funcao = -cos(9.8995*t)/9.8995
endfunction
function funcao=entrada3(t)
    funcao = sin(9.8995*t)
endfunction
function funcao=entrada4(t)
    funcao = sin(9.8995*t)
endfunction

function dy=estados(t, y)
    dy(1) = y(3) - L_A*y(4);
    dy(2) = y(3) + L_B*y(4);
    dy(3) = -(K_A/M)*y(1) - (K_B/M)*y(2) - ((B_A + B_B)/M)*y(3) + ((B_A*L_A - B_B*L_B)/M)*y(4) +
    (K_A/M)*entrada1(t) + (K_B/M)*entrada2(t) + (B_A/M)*entrada3(t) + (B_B/M)*entrada4(t);
    dy(4) = (L_A*K_A/J)*y(1) - (L_B*K_B/J)*y(2) + ((L_A*B_A - L_B*B_B)/J)*y(3) - ((B_A*L_A^2 -
    B_B*L_B^2)/M)*y(4) - (L_A*K_A/J)*entrada1(t) + (L_B*K_B/J)*entrada2(t) - (L_A*B_A/J)*entrada3(t) +
    (L_B*B_B/J)*entrada4(t);
endfunction
```

```

resultado = ode([x_A0; x_B0; v_G0; omega0], 0, t, estados);

x_A = resultado(1,:);
x_B = resultado(2,:);
v_G = resultado(3,:);
omega = resultado(4,:);

//Plotagem das saídas
scf(1)
plot2d(t,v_G);
xtitle('Velocidade do CM no tempo')
xlabel('$t$ (s)', 'fontsize', 4, 'fontname', 'times bold')
ylabel('$v_G$ (m/s)', 'fontsize', 4, 'fontname', 'times bold')

scf(2)
plot2d(t,omega);
xtitle('Velocidade de giro no tempo')
xlabel('$t$ (s)', 'fontsize', 4, 'fontname', 'times bold')
ylabel('$\omega$ (rad/s)', 'fontsize', 4, 'fontname', 'times bold')

//Determinação e plotagem dos diagramas de Bode
sistema = syslin('c', A, B, [1 1 1 1]);
G = ss2tf(sistema);
scf(3)
bode(G(1,1));
xtitle("Diagrama de bode para x_a")

scf(4)
bode(G(1,2));
xtitle("Diagrama de bode para x_b")

scf(5)
bode(G(1,3));
xtitle("Diagrama de bode para v_g")

scf(6)
bode(G(1,4));
xtitle("Diagrama de bode para w")

```