

1. Modelo matemático

Supondo molas e amortecedores lineares, as forças que atuam nos pontos A e B são

$$F_A = -k_A x_C - b_A \dot{x}_C$$

$$F_B = -k_B x_D - b_B \dot{x}_D$$

em que x_C e x_D são as distensões das molas de constante elástica k_A e k_B , respectivamente. Notar que as derivadas das distensões seguem as seguintes igualdades

$$\dot{x}_C = v_A - v_C$$

$$\dot{x}_D = v_B - v_D$$

em que v_A , v_B , v_C e v_D são as velocidades verticais dos pontos A , B , C e D , respectivamente.

Do vínculo cinemático de corpo rígido

$$v_A = v_G - l_A \omega \Rightarrow \boxed{\dot{x}_C = v_G - l_A \omega - v_C}$$

$$v_B = v_G + l_B \omega \Rightarrow \boxed{\dot{x}_D = v_G + l_B \omega - v_D}$$

em que v_G é a velocidade vertical do centro de massa (G) e ω é a velocidade angular de AB em torno de G .

Do *Teorema do Movimento do Baricentro*, aplicado na direção vertical

$$m\dot{v}_G = \sum F_{vertical}^{ext} = F_A + F_B$$

$$\boxed{m\dot{v}_G = -v_G(b_A + b_B) + \omega(b_A l_A - b_B l_B) - x_C k_A - x_D k_B + v_C b_A + v_D b_B}$$

Levando em conta que os pontos A e C estão na mesma linha vertical, assim como os pontos B e D , o momento atuante no centro de massa é dado por

$$M_G = F_B l_B \cos \theta - F_A l_A \cos \theta$$

Na condição de pequenos deslocamentos angulares tem-se que

$$\sin \theta \cong \theta, \cos \theta \cong 1 \Rightarrow M_G \cong F_B l_B - F_A l_A$$

Do *Teorema da Quantidade de Momento Angular*, tomando o centro de massa como polo, considerando um sistema de coordenadas auxiliar que rotaciona solidário ao carro e produtos de inércia nulos

$$J\dot{\omega} = \sum M_G^{ext} = M_G$$

$$J\dot{\omega} = -\omega(b_A l_A^2 + b_B l_B^2) + v_G(b_A l_A - b_B l_B) + x_C k_A l_A - x_D k_B l_B + v_D b_B l_B - v_C b_A l_A$$

As equações diferenciais destacadas descrevem a dinâmica de interesse do 1/2 carro. Elas podem ser representadas no espaço de estados pelas equações matriciais

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_G \\ \dot{\omega} \\ \dot{x}_C \\ \dot{x}_D \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-b_A - b_B}{m} & \frac{b_A l_A - b_B l_B}{m} & \frac{-k_A}{m} & \frac{-k_B}{m} \\ \frac{b_A l_A - b_B l_B}{J} & \frac{-b_A l_A^2 - b_B l_B^2}{J} & \frac{k_A l_A}{J} & \frac{-k_B l_B}{J} \\ 1 & -l_A & 0 & 0 \\ 1 & l_B & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} v_G \\ \omega \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_A}{m} & \frac{b_B}{m} \\ \frac{-b_A l_A}{J} & \frac{b_B l_B}{J} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}}_u$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_G \\ \omega \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} v_G \\ \omega \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ v_D \end{bmatrix}}_u$$

2. Simulação numérica

a) As entradas são definidas

$$v_C = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$$

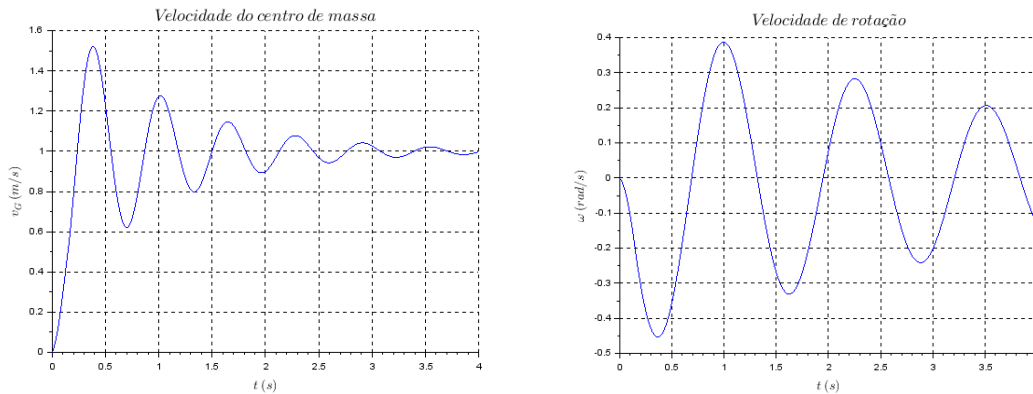
$$v_D = \begin{cases} 0, t \leq t_d \\ 1, t > t_d \end{cases}$$

Observa-se que estas entradas representam a situação na qual, em $t = 0$, o eixo dianteiro do carro está entrando em uma rampa reta (com inclinação constante), de maneira que mantendo-se a velocidade horizontal constante, a velocidade vertical também fica constante – e igual a 1 m/s neste caso.

O tempo t_d corresponde ao tempo que o eixo traseiro leva para chegar à base da rampa após o eixo dianteiro tê-lo feito. O seu valor pode ser determinado por

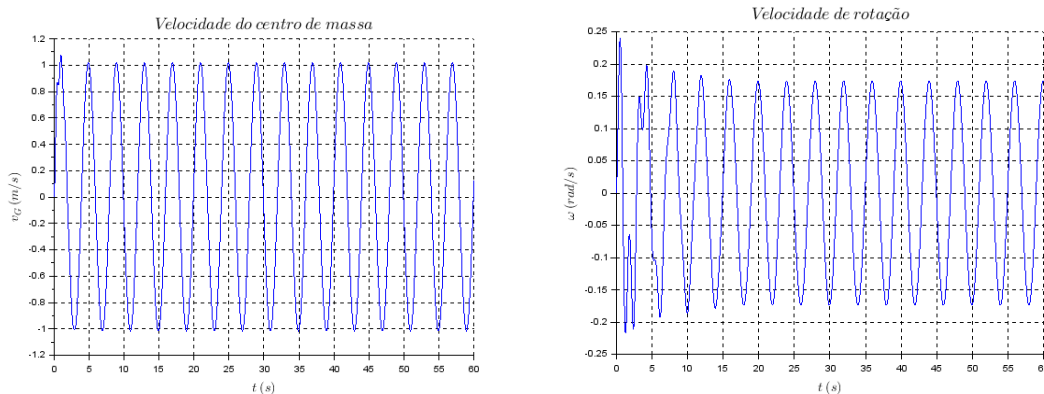
$$t_d = \frac{l_A + l_B}{v_H} = \frac{0.8 + 0.8}{10} = 0.16$$

Os resultados da simulação estão apresentados abaixo.



Observa-se que o carro realiza um movimento vertical oscilatório amortecido. Em regime, a velocidade do centro de massa tende às velocidades de entrada (1 m/s). O movimento de rotação em torno de G possui um amortecimento mais fraco que o movimento vertical. A velocidade de rotação dá indícios de, em regime, tender a 0 rad/s .

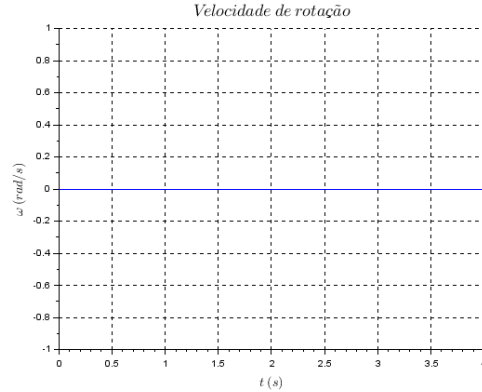
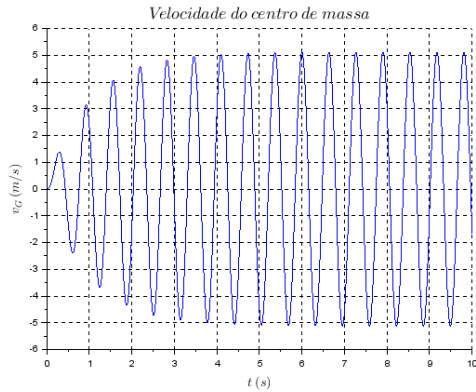
b) Seguem os resultados da simulação para uma entrada tipo seno



Mais uma vez, é possível notar que, em regime, a velocidade do centro de massa segue as estradas. A velocidade de rotação observada se deve ao fato das entradas representarem a situação na qual o carro está subindo e descendo morros – ele está inclinado ora para baixo, ora para cima.

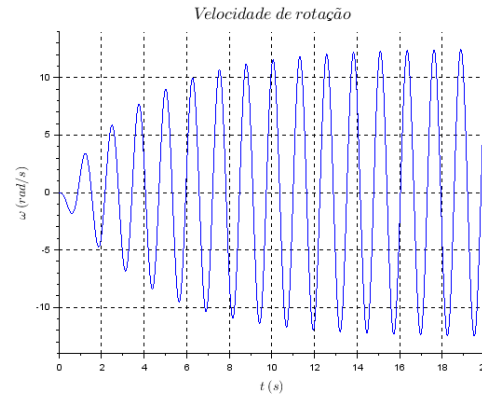
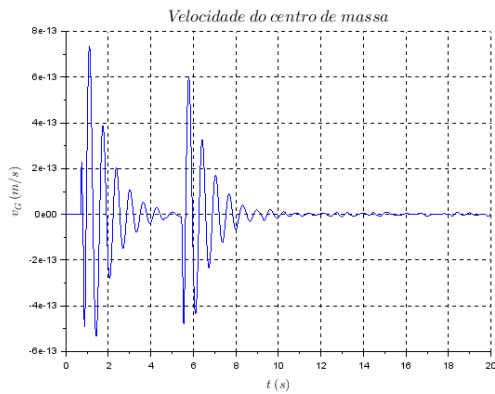
c)

Para $v_C = v_D = \sin 9.8995t$



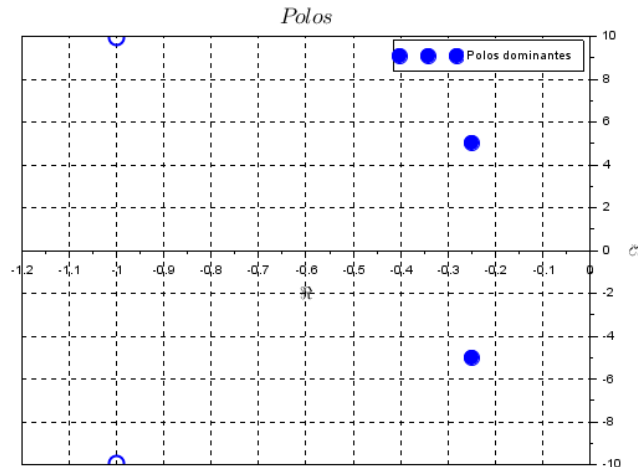
Observa-se do segundo gráfico que o carro não sofre rotação. Isto ocorre em virtude de as entradas serem iguais a todo momento, anulando o momento resultante (visto também que os braços são iguais). Do primeiro gráfico é possível notar que a amplitude da velocidade vertical aumenta até se estabilizar em um máximo.

Para $v_C = -v_D = \sin 4.9875t$



Neste caso é a amplitude da velocidade de rotação que cresce até se estabilizar em um máximo. A velocidade vertical, passado o transitório, tende a zero. Isto decorre de as entradas serem opostas, anulando, assim, a força vertical que atua sobre o baricentro.

d) Os polos do sistema são os autovalores da matriz dinâmica. Eles são apresentados plotados no plano $Re \times Im$



Observa-se que os polos não possuem parte real positiva, o que era de se esperar, visto o comportamento estável do sistema.

Tomando o polo dominante no semiplano superior (s), o coeficiente de amortecimento ζ e as frequências natural ω_n , amortecida ω_d e de ressonância ω_r são dadas por

$$s = -\alpha + \beta j = -0.25 + 4.99375j$$

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 0.050$$

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 5.000 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4.994 \text{ rad/s}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 4.987 \text{ rad/s}$$

Fica evidente, então, que o segundo caso do item (c) emprega a frequência de ressonância.

3. Análise de resposta em frequência

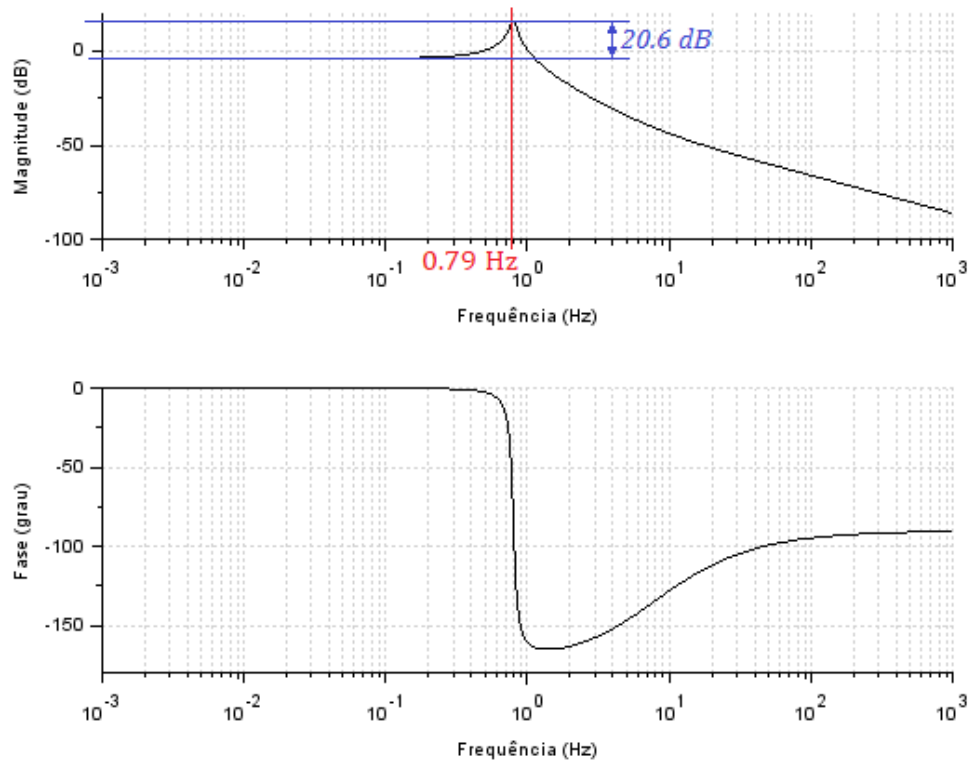
A matriz das funções de transferência, considerando condições iniciais nulas, é dada por

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

$$G_{i,j} = \frac{Y_i}{U_j}$$

Os diagramas de Bode para as funções de transferência são

Diagramas de Bode $\frac{\Omega}{V_D}$



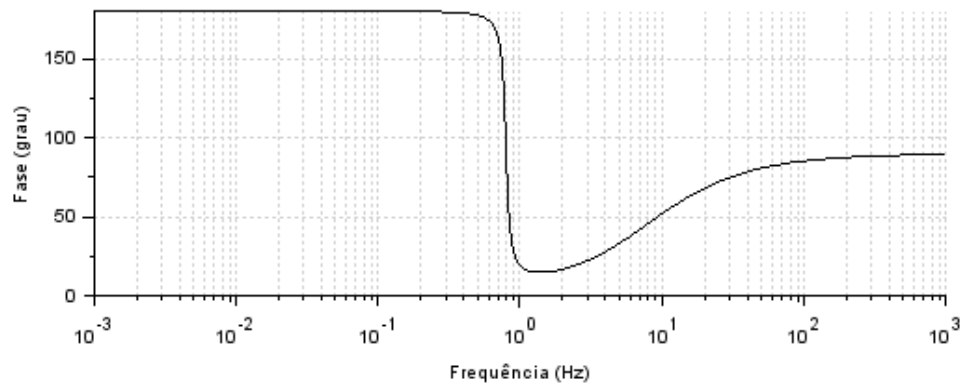
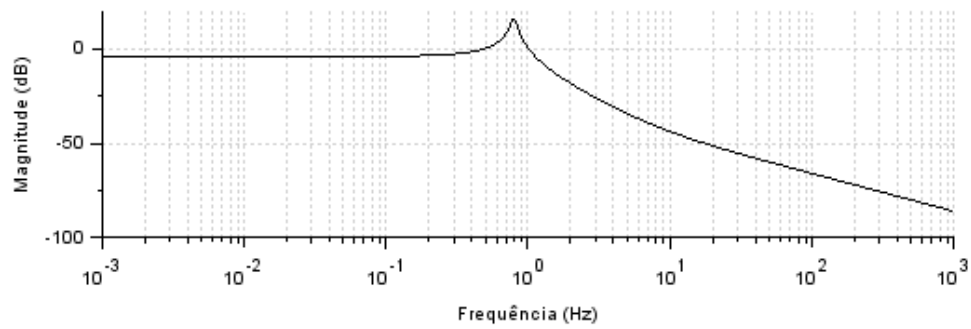
Dos diagramas de Bode anteriores obtêm-se a frequência natural ω_n e o coeficiente de amortecimento ζ relacionados à velocidade de rotação como segue

$$f_n \cong 0.79 \text{ Hz} \Rightarrow \omega_n = 2\pi f_n \cong 4.964 \text{ rad/s}$$

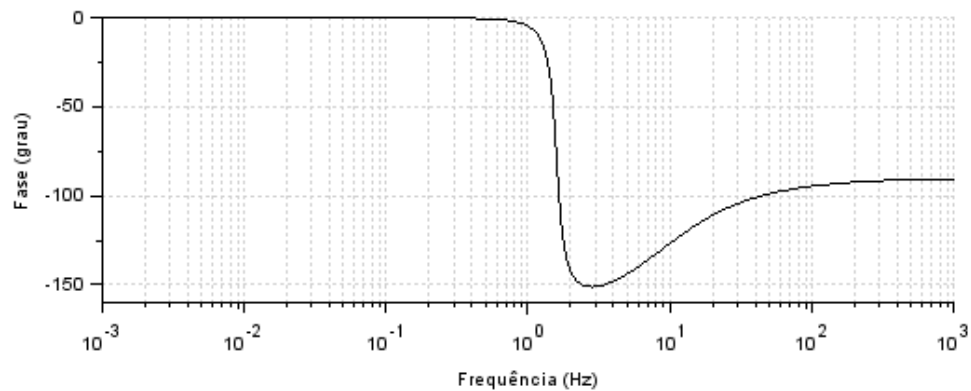
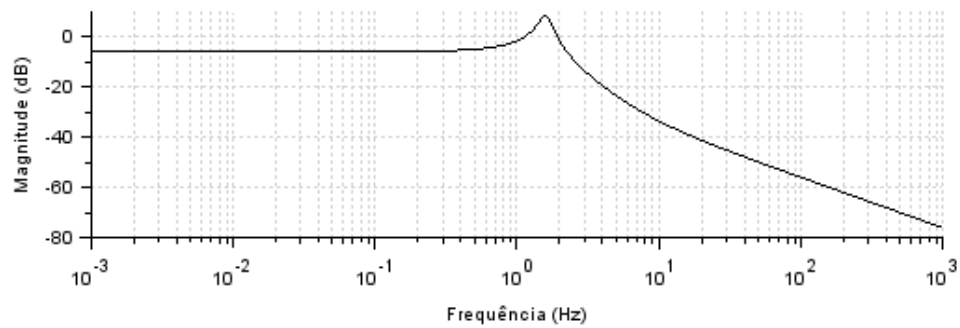
$$\left. \frac{1}{2\zeta} \right|_{dB} = 20 \log \frac{1}{2\zeta} \cong 20.6 \text{ dB} \Rightarrow \zeta \cong 0.047$$

Nota-se que os resultados obtidos dos diagramas não batem exatamente aos resultados analíticos. Isso se deve a erros de leitura.

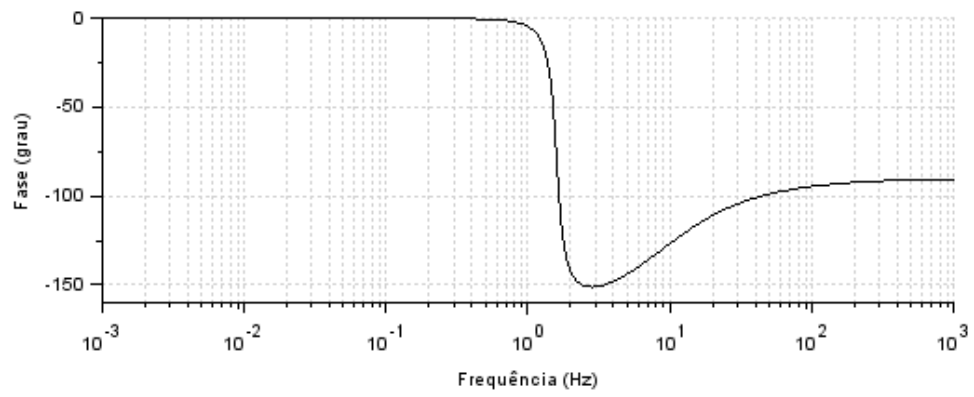
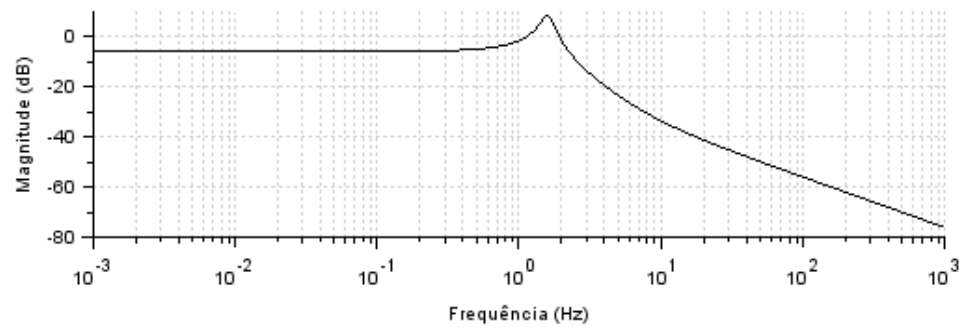
Diagramas de Bode $\frac{\Omega}{V_C}$



Diagramas de Bode $\frac{V_G}{V_D}$



Diagramas de Bode $\frac{V_G}{V_C}$



Apêndice A – código do Scilab para as questões 1, 2 e 3

```
//=====MEIO_CARRO=====//

//Parâmetros
m = 200 //massa [kg]
J = 512 //momento de inércia [kg.m^2]
l_A = 0.8 //distância AG [m]
l_B = 0.8 //distância BG [m]
k_A = 10000 //constante elástica [N/m]
k_B = 10000 //constante elástica [N/m]
b_A = 200 //constante de amortecimento [N.s/m]
b_B = 200 //constante de amortecimento [N.s/m]
v_H = 10 //velocidade horizontal de G [m/s]

t_d = (l_A+l_B)/v_H

//Inputs
t_span = 20 //intervalo de integração [s]
dt = 0.001 //passo de integração [s]
x_0 = [0;0;0] //condições iniciais [v_G;omega;x_C;x_D](t=0)

t = 0:dt:t_span //vetor tempo (linha)

//função que define o vetor de entradas
freq_ang = 4.9875 //frequência angular [rad/s]
phi = freq_ang*t_d //defasagem entre v_C e v_D [rad]
function U=entradas(t)
    U = [sin(freq_ang*t);sin(freq_ang*t-phi)]
endfunction

//vetor de entradas
u = entradas

//-----espaço_de_estados-----//

//definindo o espaço de estados
//x(1) = v_G, x(2) = omega, x(3) = x_C, x(4) = x_D
function dx=carro(t, x, u)
    dx(1) = (-(b_A+b_B)*x(1)+(b_A*l_A-b_B*l_B)*x(2)-k_A*x(3)-k_B*x(4)+b_A*u(t)(1)+b_B*u(t)(2))/m
    dx(2) = ((b_A*l_A-b_B*l_B)*x(1)-(b_A*l_A^2+b_B*l_B^2)*x(2)+k_A*l_A*x(3)-k_B*l_B*x(4)-
    b_A*l_A*u(t)(1)+b_B*l_B*u(t)(2))/J
    dx(3) = x(1)-l_A*x(2)-u(t)(1)
    dx(4) = x(1)+l_B*x(2)-u(t)(2)
endfunction

//vetor de estado
x = ode(x_0,0,t,carro)

//vetor de saídas [v_G;omega]
y = [x(1,:);x(2,:)]

//-----funções_de_transferência-----//

//definindo a variável complexa
s = poly([0,1],'s','coeff')

//matriz dinâmica
A = [ -(b_A+b_B)/m , (b_A*l_A-b_B*l_B)/m , -k_A/m , -k_B/m ;..
      (b_A*l_A-b_B*l_B)/J , -(b_A*l_A^2+b_B*l_B^2)/J , k_A*l_A/J , -k_B*l_B/J ;..
      1 , -l_A , 0 , 0 ;..
      1 , l_B , 0 , 0 ]

//matriz de entradas
B = [ b_A/m , b_B/m ;..
```

```

-b_A*I_A/J, b_B*I_B/J ;..
-1 , 0 ;..
0 , -1 ]

//matriz de saídas
C = [ 1, 0, 0, 0 ;..
      0, 1, 0, 0 ]

//matriz resolvente
resolvente = s*eye(A)-A

//equação característica
eq_caract = det(resolvente)

//polos
polos = roots(eq_caract)

//matriz de transferência
G = syslin('c',C*inv(resolvente)*B)

//-----plots-----//

//velocidade do centro de massa
xset('window',1)
plot2d(ty(1,:),2)
xtitle("$\LARGE Velocidade\:\do\:\centro\:\de\:\massa$", "$\Large t\:\ (s)$", "$\Large v_G\:\ (m/s)$")
xgrid(1)

//velocidade do centro de massa
xset('window',2)
plot2d(ty(2,:),2)
xtitle("$\LARGE Velocidade\:\de\:\rotação$", "$\Large t\:\ (s)$", "$\Large \omega\:\ (rad/s)$")
xgrid(1)

//polos do sistema
xset('window',3)
scatter(real(polos)(1:2),imag(polos)(1:2),100,'blue1','thickness',2)
scatter(real(polos)(3:4),imag(polos)(3:4),100,'blue1','fill','thickness',1)
e = gce()
captions(e.children,'Polos dominantes')
xtitle("$\LARGE Polos$", "$\Large \Re$", "$\Large \Im$")
xgrid(1)
axes = gca()
axes.x_location = "origin"
axes.y_location = "origin"

//-----diagramas_de_bode-----//
xset('window',4)
bode(G(1,1))
xtitle("$\LARGE Diagramas\:\de\:\Bode\:\:\frac{V_G}{V_C}$")

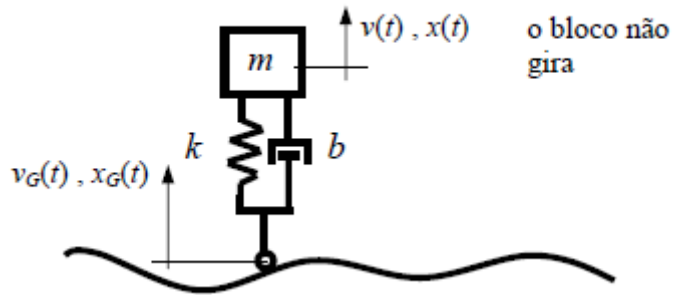
xset('window',5)
bode(G(1,2))
xtitle("$\LARGE Diagramas\:\de\:\Bode\:\:\frac{V_G}{V_D}$")

xset('window',6)
bode(G(2,1))
xtitle("$\LARGE Diagramas\:\de\:\Bode\:\:\frac{\Omega}{V_C}$")

xset('window',7)
bode(G(2,2))
xtitle("$\LARGE Diagramas\:\de\:\Bode\:\:\frac{\Omega}{V_D}$")

```

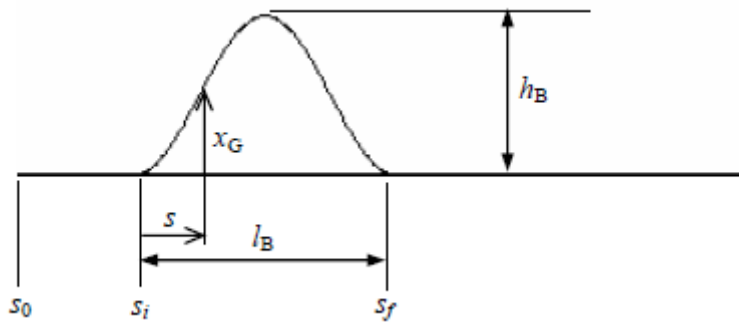
4. Simulação de sistema não linear



4.1 Definição das equações diferenciais que modelam o sistema:

```
// Definição da função que implementa as equações diferenciais do sistema
function [xdot]=sistema(t, x, entrada)
    if (x(1)-x(2))<lc then xdot=[x(3);entrada(t);(-kB*(x(1)-x(2))-l-b*(x(3)-entrada(t))-m*g)/m];
    elseif (x(1)-x(2))>l then xdot=[x(3);entrada(t);-g];
    else xdot=[x(3);entrada(t);(-kM*(x(1)-x(2))-l-b*(x(3)-entrada(t))-m*g)/m];
end;
end
```

4.2. Definição da entrada do sistema



```
function [ut]=entrada(t)
    if t<ti then
        ut=0;
    elseif t<(ti+lB/vc) then
        ut=(hB*2*pi*vc/(2*lB))*sin((vc*2*pi/lB)*(t-ti));
    else
        ut=0;
    end;
end
```

4.3. Solução

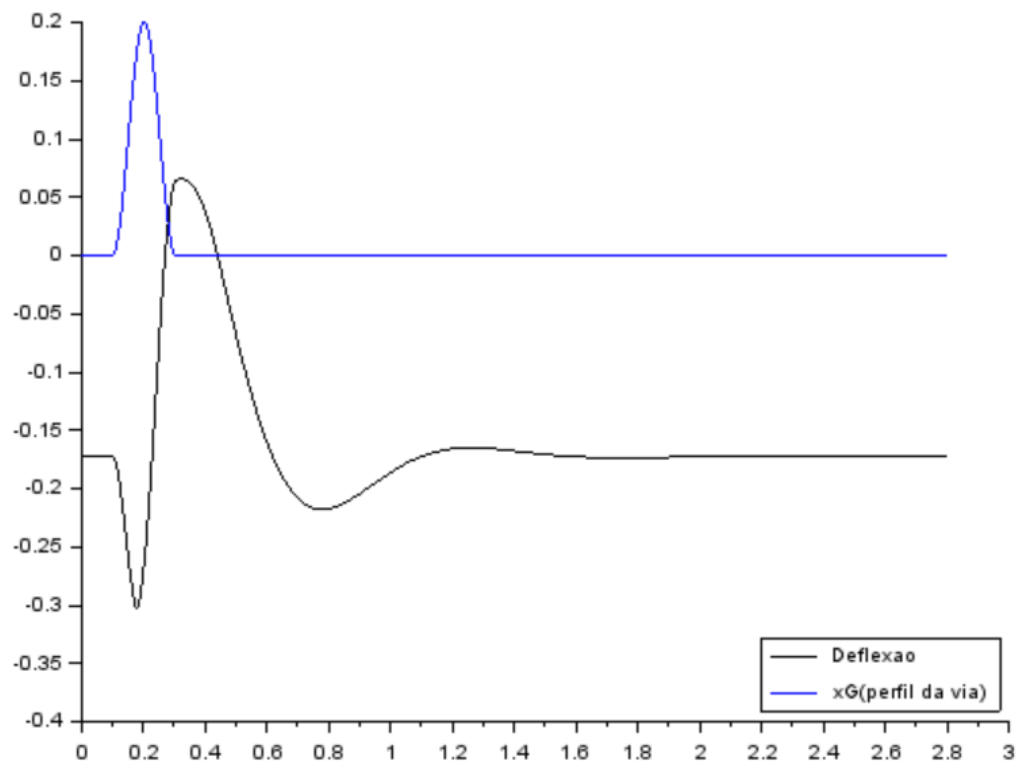
```
// Definição do arquivo que implementa a simulação:
clear all
// Use o caminho correto em seu computador:
```

```

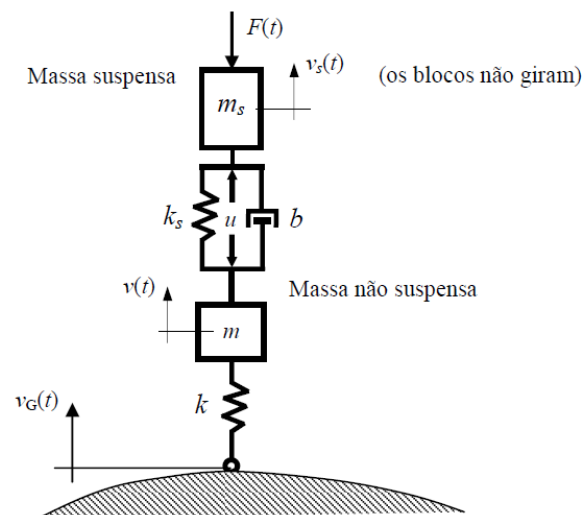
// Carregar a funcao que implementa o modelo matematico do sistema
exec("D:\Arquivos\Materiais Didáticos\Modelagem\SciLab\LabG\sistema.sci");
// Carregar a função que implementa a entrada
exec("D:\Arquivos\Materiais Didáticos\Modelagem\SciLab\LabG\entrada.sci");
// Definir os valores dos parametros
m=250; // massa [kg]
b=1885; // constante de amortecimento [Ns/m]
g=9.8; // aceleracao da gravidade [m/s2]
kM=14213; // rigidez da mola [N/m]
kB=142130; // rigidez do batente [N/m]
l=0.4; // comprimento natural da mola [m]
lc=0.1; // comprimento da mola totalmente comprimida [m]
hB=0.2; // altura da lombada [m]
lB=2; // comprimento da lombada [m]
ti=0.1; // tempo percorrido ate atingir a lombada [s]
vch=35; // velocidade do carro [km/h]
vc=vch/3.6; // velocidade do carro [m/s]
x0=[l-m*g/kM;0;0]; // condições iniciais
// O valor l-m*g/kM reflete a posição de equilíbrio da suspensão
// quando apenas o peso esta atuando.
t0=0; // instante inicial
t=0:0.0001:2.8; // vetor de tempo

x=ode(x0,t0,t,list(sistema,entrada));
// Plotando a diferenca entre a coordenada da massa e a coordenada
// do solo menos o comprimento natural da mola (deflexao):
plot2d(t,x(1,:)-x(2,:)-l)
// Se este valor eh negativo, a mola esta comprimida.
// Se este valor eh positivo, o carro "descolou" do solo.
// Se este valor diminui ate lc-l metros (neste caso -0.3 m),
// o batente eh atingido.
// Plotando xG:
plot2d(t,x(2,:),2)
// Usando a variavel do tipo 'lista':
T=list("Resposta transitoria da suspensao","Tempo t [s]","Solução [m]","Deflexao","xG(perfil da via)");
// Colocando uma legenda na parte superior esquerda da figura (parametro 4):
legends([T(4),T(5)],[1,2],4);
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:

```



5. Exercício



Modelaremos o sistema de 1/4 de carro considerando as massas suspensa e não suspensa. Consideraremos um sistema concentrado a parâmetros constantes.

a) Variáveis de estado:

x : posição da massa não suspensa

x_s : posição da massa suspensa

x_G : coordenada vertical do solo

v : velocidade da massa não suspensa

v_s : velocidade da massa suspensa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_s \\ x_G \\ v \\ v_s \end{bmatrix}$$

b) Parâmetros do sistema

m_s : massa suspensa

m : massa não suspensa

k_s : rigidez da mola suspensa

k : rigidez da mola não suspensa

k_B : rigidez do batente da mola suspensa

b : constante de amortecimento

c) Entradas no sistema:

$F(t)$: força de perturbação

U : força de controle

V_G : velocidade vertical imposta pelo solo

d) Equacionamento

Para o caso normal da roda encostando no chão e da mola comprimida sem dar batente:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m} [-k(x - x_G - l) - k_s(x_s - x - l) - b(v_s - v) - mg + u] \\ \dot{x}_s = v_s \\ \dot{v}_s = \frac{1}{m_s} [k_s(x_s - x - l_s) + b(v_s - v) - mg - u] \end{cases}$$

Para o caso da roda não encostando no chão

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -g \\ \dot{x}_s = v_s \\ \dot{v}_s = -g \end{cases}$$

Para o caso de batente:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m} [-k(x - x_G - l) - k_B(x_s - x - l) - b(v_s - v) - mg + u] \\ \dot{x}_s = v_s \\ \dot{v}_s = \frac{1}{m_s} [k_B(x_s - x - l_s) + b(v_s - v) - mg - u] \end{cases}$$

e) Programa no scilab

Foi utilizada a mesma entrada do exercício 4:

```
function [ut]=entrada(t)
    if t<ti then
        ut=0;
    elseif t<(ti+lb/vc) then
        ut=(hb*2*pi*vc/(2*lb))*sin((vc*2*pi/lb)*(t-ti));
    else
        ut=0;
    end;
endfunction
```

As equações diferenciais foram escritas e forma análoga ao exercício 4, com a diferença de que foram acrescentadas mais variáveis de estado e seus respectivos equacionamentos, conforme itens (a) e (d).

```
// Definicão da função que implementa as equações diferenciais do sistema
function [xdot]=sistema2GL(t, x, entrada)
    if (x(1)-x(3))<lc then xdot = [x(4);x(5);entrada(t);(1/m)*(-k*(x(1)-entrada(t)-l)-kB*(x(2)-x(1)-lS)-
    b*(x(5)-x(4))-m*g+entrada(t));(1/ms)*(kB*(x(2)-x(1)-lS)+b*(x(5)-x(4))-ms*g-entrada(t))];
    elseif (x(1)-x(3))>l then xdot = [x(4);x(5);entrada(t);-g;-g];

    else xdot = [x(4);x(5);entrada(t);(1/m)*(-k*(x(1)-entrada(t)-l)-ks*(x(2)-x(1)-lS)-b*(x(5)-x(4))-
    m*g+entrada(t));(1/ms)*(kB*(x(2)-x(1)-lS)+b*(x(5)-x(4))-ms*g-entrada(t))];
    end
endfunction
```

Por fim, utilizamos o mesmo esqueleto cedido para o exercício 4, apenas com os parâmetros e funções atualizados.

```
// Definição do arquivo que implementa a simulação:
clear all
// Use o caminho correto em seu computador:
// Carregar a função que implementa o modelo matemático do sistema
exec("D:\Arquivos\Materiais Didáticos\Modelagem\SciLab\LabG\sistema2GL.sci");
// Carregar a função que implementa a entrada
exec("D:\Arquivos\Materiais Didáticos\Modelagem\SciLab\LabG\entrada.sci");
// Definir os valores dos parâmetros
m=20; // massa não suspensa [kg]
ms=250; // massa suspensa
```

```

b=1885; // constante de amortecimento [Ns/m]
g=9.8; // aceleracao da gravidade [m/s^2]
ks=14213; // rigidez da mola suspensa [N/m]
k=20000; // rigidez da mola nao suspensa [N/m]
kB=142130; // rigidez do batente [N/m]
lS=0.4; // comprimento natural da mola suspensa [m]
l=0.2; //comprimento natural da mola nao suspensa [m]
lc=0.1; // comprimento da mola totalmente comprimida [m]
hB=0.2; // altura da lombada [m]
lB=0.5; // comprimento da lombada [m]
ti=0.1; // tempo percorrido ate atingir a lombada [s]
vch=35; // velocidade do carro [km/h]
vc=vch/3.6; // velocidade do carro [m/s]
x0=[l-(m+ms)*g/k;1-ms*g/ks;0;0;0]; // condições iniciais
// O valor l-m*g/kM reflete a posição de equilíbrio da suspensão
// quando apenas o peso esta atuando.
t0=0; // instante inicial
t=0:0.001:2.8; // vetor de tempo

%ODEOPTIONS=[1,0,0,%inf,0,2,5000,12,5,0,-1,-1]
x=ode(x0,t0,t,list(sistema2GL,entrada));
// Plotando a diferenca entre a coordenada da massa e a coordenada
// do solo menos o comprimento natural da mola (deflexao):
plot2d(t,x(1,:)-x(3,:)-l)
plot2d(t,x(2,:)-x(3,:)-lS)
// Se este valor eh negativo, a mola esta comprimida.
// Se este valor eh positivo, o carro "descolou" do solo.
// Se este valor diminui ate lc-l metros (neste caso -0.3 m),
// o batente eh atingido.
// Plotando xG:
plot2d(t,x(3,:),2)
// Usando a variavel do tipo 'lista':
T=list("Resposta transitoria da suspensao","Tempo t [s]","Solução [m]","Deflexao massa
suspensa","deflexao massa nao suspensa","xG(perfil da via)");
// Colocando uma legenda na parte superior esquerda da figura (parametro 4):
legends([T(4),T(5)],[1,2],4);
// Colocando um titulo na figura e nomeando os eixos:

```