ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Lista E

Nome	**NºUSP**
João Pedro Junqueira Seara de Morais	10774437

Professores Agenor T. Fleury e Décio C. Donha

São Paulo

Outubro, 2020

Sumário

1. Lista E

1.1 Exercício

Obtenha as equações de estado e a função de transferência do seguinte sistema, e simule para uma entrada F(t) do tipo degrau (experimente outros tipos de entrada também), considerando a deformação x(t) da mola como saída:

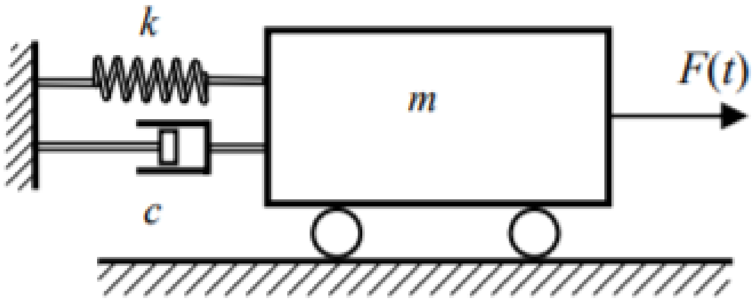

Figura 1: Simulação do exercício

Simule o sistema para diferentes valores de $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{k}$, de tal forma que se tenha uma simulação para cada um dos três casos a seguir:

$$\begin{cases} \zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{km}} < 1 \\ \zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{km}} = 1 \\ \zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{km}} > 1 \end{cases}$$

Para resolver o exercício proposto, devemos montar o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{kx_1}{m} - \dfrac{cx_2}{m} + \dfrac{cu}{m} \\ y = x_1 \end{cases}$$

Podemos representar o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Tendo que $A, B, C\ e\ D$ são:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{c}{m} \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D = [0] \end{cases}$$

Nesse momento, aplicaremos a função de transferência. Primeiramente, aplicaremos a transformada de Laplace impondo as condições iniciais nulas ($x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$):

$$\begin{cases} sX_1 = X_2 - U \\ sX_2 = -\frac{kX_1}{m} - \frac{cX_2}{m} + \frac{cU}{m} \end{cases}$$

Feito isso, transformamos o sistema de equações diferenciais em algébricas, podendo resolvê-lo:

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{ms}{ms^2 + cs + k} U \\ Y = -\frac{ms}{ms^2 + cs + k} U = G(s)U \end{cases}$$

Por fim, é também essencial explicitar que a função de transferência $G(s)$ é importante na elaboração do código no *Scilab,* uma vez que representa a relação entre a transformada de Laplace da saída y e a transformada de Laplace da entrada u.

Na elaboração do código desse exercício, portanto, faremos uso da análise transitória, onde o objetivo é observar o comportamento do sistema ao longo do tempo.

Para $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} < 1$:

$$\begin{cases} m = 1\ kg \\ c = 10\ \frac{Ns}{m} \\ k = 900\ \frac{N}{m} \end{cases}$$

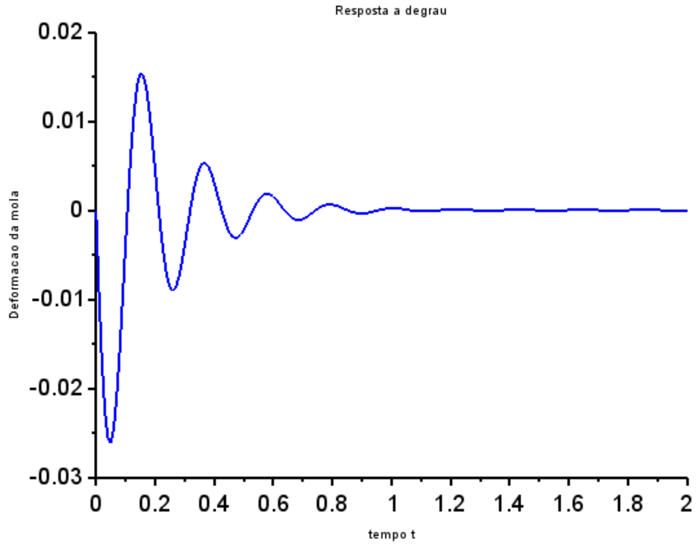

Figura 2: Caso 1: $\zeta < 1$

Para $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 1$:

$$\begin{cases} m = 1\ kg \\ c = 10\ \frac{Ns}{m} \\ k = 25\ \frac{N}{m} \end{cases}$$

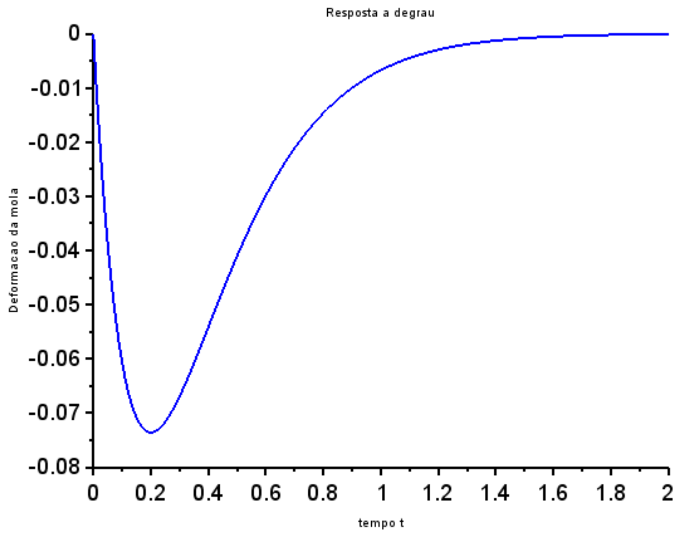

Figura 3: Caso 2: ζ=1

Para $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} > 1$:

$$\begin{cases} m = 1\ kg \\ c = 10\ \frac{Ns}{m} \\ k = 1\ \frac{N}{m} \end{cases}$$

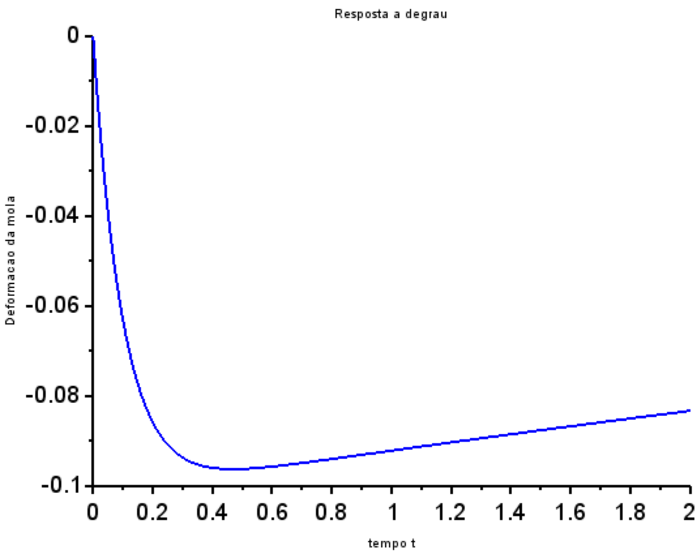

Figura 4: Caso 3: ζ>1

O código utilizado para a resolução desse exercício foi:

```
clear

// Definindo os parametros do sistema (caso 1: ζ>1):
m = 1;
c = 10;
k = 900;

// Definindo os polinomios da funcao de transferencia:
// Numerador:
n=(-m)*poly(0,'s','roots');

// Denominador
d=poly([k c m],'s','coeff'); //observe a ordem contraria dos coeficientes

// Montando a funcao de transferencia, onde o parametro 'c' indica sistema de
// tempo continuo. Se for um sistema de tempo discreto, use o parametro 'd'.
G=syslin('c',n/d)

// Simulando o sistema para uma entrada degrau (u=0 para t<0 e u=1 para t>0):
```

```
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;

// Definindo a entrada:
u=ones(t);

// Definindo o vetor de condicoes iniciais:
x0=[0;0]; // x(0) = 0 e a derivada de x(t) no instante inicial tambem eh nula.

// Realizando a simulacao com o comando csim:
[y]=csim(u,t,G,x0);

// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)

// Mostrando o resultado da simulacao:
xset('thickness',2)
xset('font size',4)
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
```

1.2 Lição de casa

Para as diferentes simulações do sistema, obtemos polos diferentes. No primeiro caso, onde $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} < 1$, observamos polos complexos. Foram simuladas três condições iniciais diferentes para cada caso.

A partir da elaboração do código em *Scilab*, obtemos:

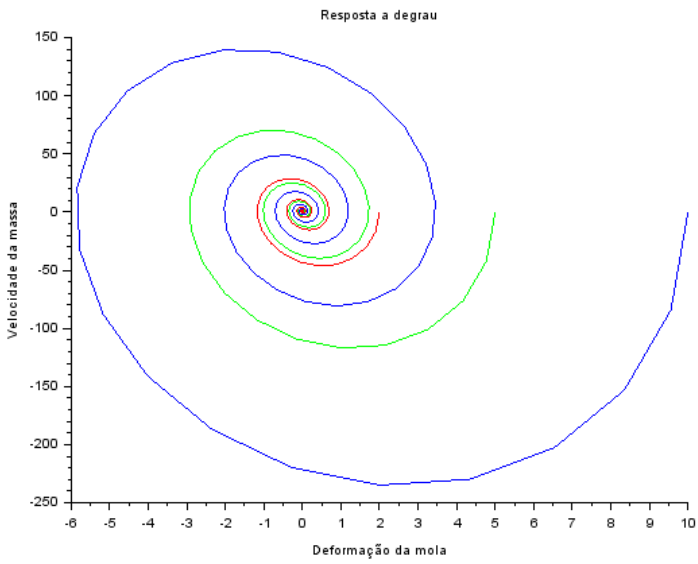

Figura 5: Caso 1: ζ<1

Para $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 1$:

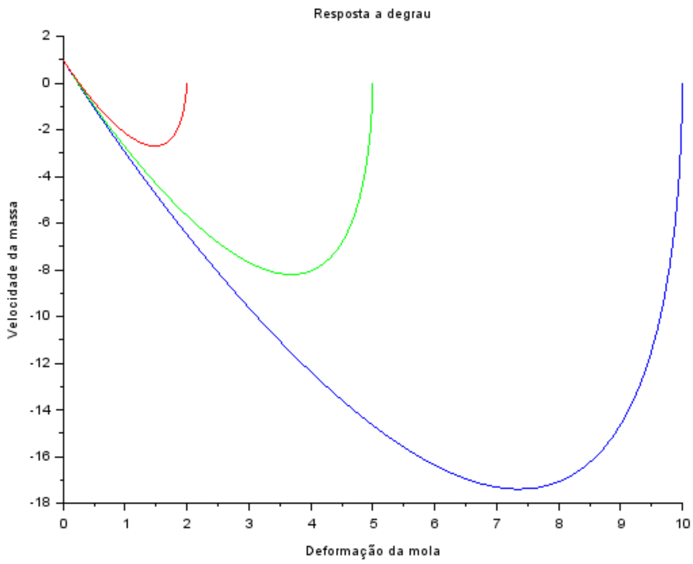

Figura 6: Caso 2: ζ=1

E, por fim, para $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} > 1$:

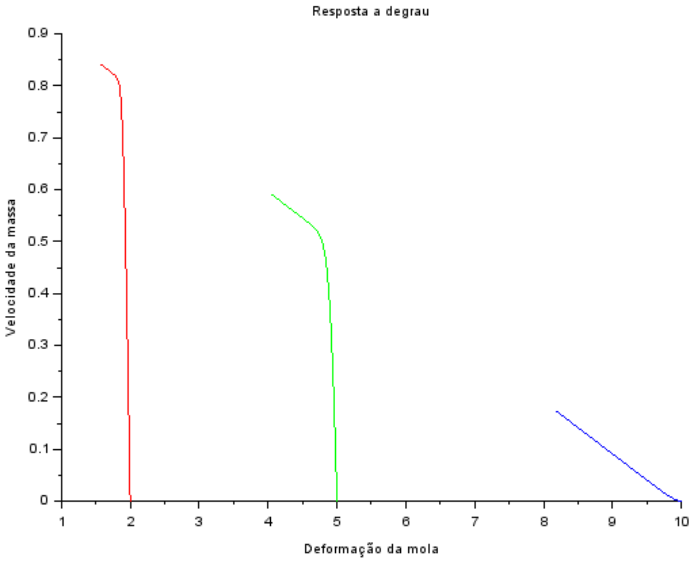

Figura 7: Figura 6: Caso 3: ζ>1