LISTA E PME3380

Wilson Siou Kan Chow

October 2020

1 Item A

Será estudado o deslocamento de um sistema massa-mola com um carrinho.

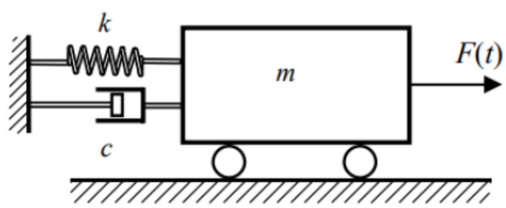
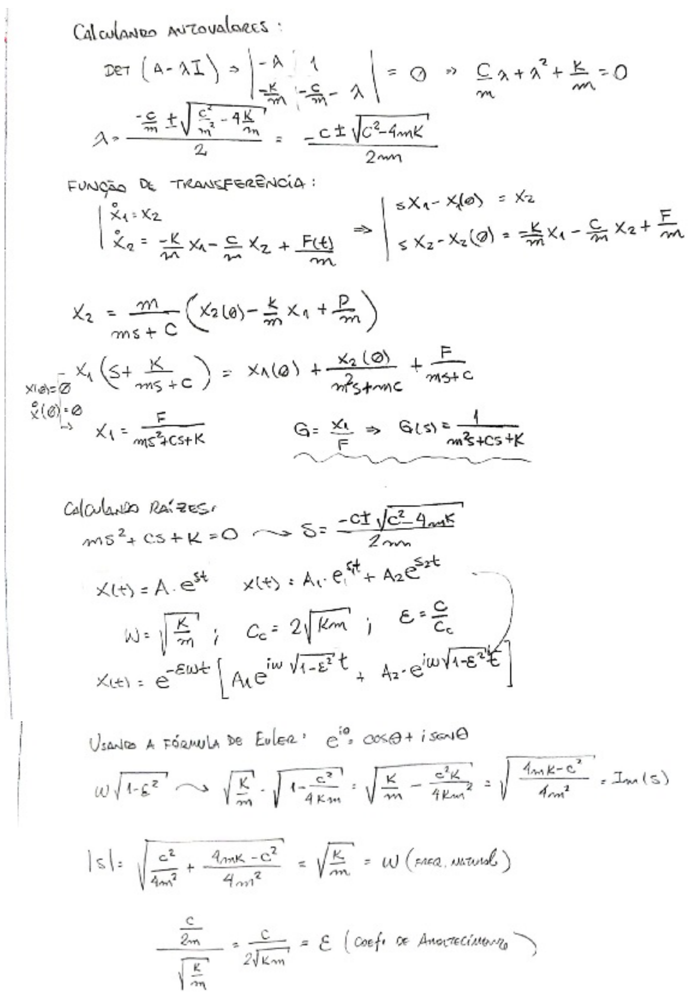


Figure 1: Sistema

Serão utilizados dois métodos para resolver este problema: o uso de espaços de estado e o uso das transformadas de Laplace. Os dois métodos levam a resultados iguais, mas são bem diferentes.

Usando autovalores:



CALCULANDO AUTOVALORES:

$$\det(A-\lambda I) \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{c}{m}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{c}{m}\lambda + \lambda^2 + \frac{K}{m} = 0$$

$$\lambda = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{K}{m}}}{2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4mK}}{2m}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F(t)}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_1 - X_1(0) = X_2 \\ sX_2 - X_2(0) = -\frac{K}{m}X_1 - \frac{c}{m}X_2 + \frac{F}{m} \end{cases}$$

$$X_2 = \frac{m}{ms+c}\left(X_2(0) - \frac{k}{m}X_1 + \frac{P}{m}\right)$$

$$X_1\left(s + \frac{K}{ms+c}\right) = X_1(0) + \frac{X_2(0)}{m^2s+mc} + \frac{F}{ms+c}$$

$x(0)=0$

$\dot{x}(0)=0$

$$X_1 = \frac{F}{ms^2+cs+K} \qquad G = \frac{X_1}{F} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{m s^2+cs+K}$$

CALCULANDO RAÍZES:

$$ms^2 + cs + K = 0 \rightsquigarrow s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4mK}}{2m}$$

$$x(t) = A \cdot e^{st} \qquad x(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \; ; \quad C_c = 2\sqrt{Km} \; ; \quad \varepsilon = \frac{c}{C_c}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon\omega t}\left[A_1 e^{i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t} + A_2 \cdot e^{i\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t}\right]$$

USANDO A FÓRMULA DE EULER: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\omega\sqrt{1-\varepsilon^2} \rightsquigarrow \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot \sqrt{1-\frac{c^2}{4Km}} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{c^2K}{4Km^2}} = \sqrt{\frac{4mK-c^2}{4m^2}} = \mathrm{Im}(s)$$

$$|s| = \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} + \frac{4mK-c^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega \text{ (FREQ. NATURAL)}$$

$$\frac{\frac{c}{2m}}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{Km}} = \varepsilon \text{ (COEF. DE AMORTECIMENTO)}$$

Figure 2: Autovalores

Usando Laplace:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u$$

$\longrightarrow$ LAPLACE:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+K}$$

Figure 3: Laplace

Desta forma, podemos simular o movimento para configurações diferentes do sistema.

Como um exemplo, temos que $m = 3kg$ e $k = 3kg$, e serão simulados os casos em que:

- $x(0) = 1m$ e $\dot{x}(0) = 1m/s$
- $x(0) = 2m$ e $\dot{x}(0) = 2m/s$
- $x(0) = 3m$ e $\dot{x}(0) = 3m/s$
- $x(0) = 4m$ e $\dot{x}(0) = 4m/s$
- $x(0) = 5m$ e $\dot{x}(0) = 5m/s$

Neste caso, deve ser analisado o que acontece ao variar os valores de b, que por consequência alteram os valores de C.

Repare quem em $b > 1$, o regime se torna crítico ou supercrítico, fazendo com que o sistem não oscile e permaneça parado. Já para $b < 1$, o sistema continua a oscilar, marcando o regime subcrítico.

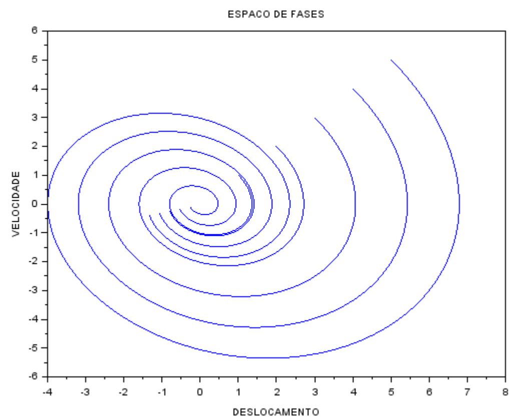


Figure 4: b=1

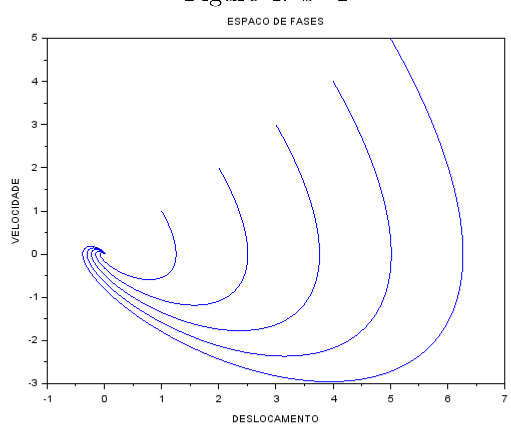


Figure 5: b=2

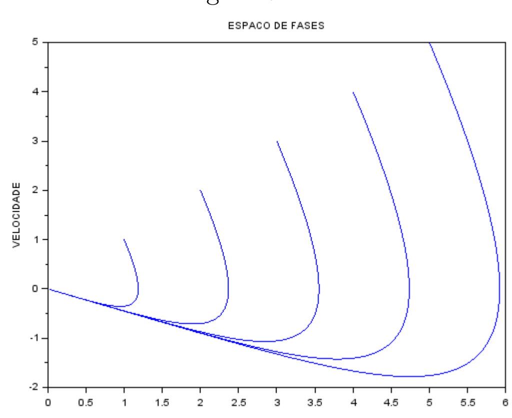


Figure 6: b=3

```
clear();
winsid(xdel());

t_f = 10;
delta = 1000;
t = linspace(0,t_f, delta);


m = 3;
k = 3;


teste = 1;

if teste == 1 then
    c = 1;
elseif teste == 2 then
    c = 4;
elseif teste == 3 then
    c = 8;
end


x0 = [1 2 3 4 5];
xp0 = [1 2 3 4 5];


funcprot(0)

function dy = differ(t,y)
    dy(1) = y(2);
    dy(2) = -(k/m)*y(1) - (c/m)*y(2);

endfunction


for i = 1:length(x0)
    solucao = ode([x0(i) ; xp0(i)] , 0 , t , differ);

    for j = 1:length(t)
        x(i,j) = solucao(1,j);
        xp(i,j) = solucao(2,j);
    end
end
```

```
scf(1);
xtitle("ESPACO DE FASES");
xlabel("DESLOCAMENTO");
ylabel("VELOCIDADE");
for i = 1:length(x0)
    plot(x(i,:), xp(i,:))

end
```