Lista E

PME 3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

João Vinícius Hennings de Lara

10771740

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

São Paulo

22 de outubro de 2020

1 Exercício

Deseja-se simular o sistema massa mola amortecedor da figura 1. O carro tem massa m, a mola tem constante k e o amortecedor, c. A equação diferencial linear que define o sistema é dada por:

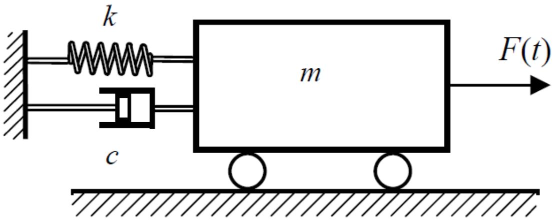

Figura 1 – Sistema massa mola amortecedor.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{F(t)}{m} \tag{1}$$

Adotando o vetor de estados $X = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \end{bmatrix}^T$, podemos reescrever essa equação da seguinte maneira.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t) \tag{2}$$

Considerando condições iniciais nulas, obteve-se a função de transferência G(x), dada por:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{3}$$

É possível, então, simular o sistema de duas maneiras: usando a função de transferência (3) ou o espaço de estados (1). Nas simulações que virão, resolver-se-á o sistema linear do espaço de estados, através do código a seguir.

```

clear all

//Definição dos par metros
m= 1;
k=900;
Zeta = 0.1;
b = 2*Zeta*sqrt(k*m);

//Criação das matrizes e do sistema linear
A = [0 1; -k/m -b/m];
B=[0; 1/m];
C=[0 0];
D= [0];
SL = syslin('c',A,B,C,D);

// Resolução do sistema linear
t = 0:0.01:2;
u=ones(2*t);
x0e = [0;0];
[y,x]=csim (u,t,SL,x0e);

// Criando janela gráfica para posição e velocidade
f1 = scf(1);
    plot (t,x(1,:),'r',t,x(2,:),'b');
    legend(["x","x_ponto"])
    xtitle ("Posição e Velocidade no tempo" ,"tempo (s)","m ou m/s");

// Criando janela gráfica para espaço de estados
f2 = scf(2) ;
    plot (x(1,:),x(2,:),'k');
    xtitle ("Espaço de estados" ,"posição [m]","velocidade")

//Salvando os gráficos
T=list("x-xp-","EE-")
for k=1:2
    xs2png(k,strcat(["MassaMola_",T(k),string(k)]))
    xdel(k)
end
```

Simulou-se então o sistema para $\zeta = 0.1, 1, 2$, criando os gráficos 2-4 de posição e velocidade e de espaço de estados.

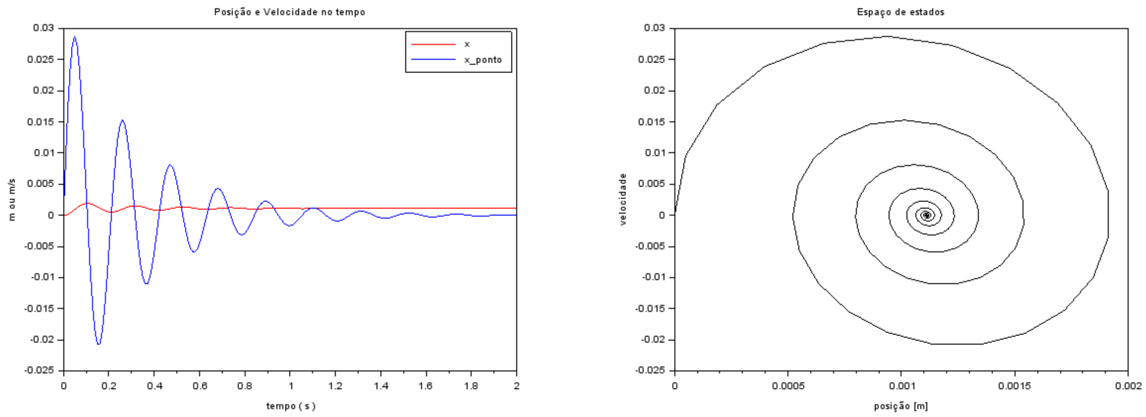

Figura 2 – Posição, velocidade e Espaço de Estados com $\zeta = 0.1$.

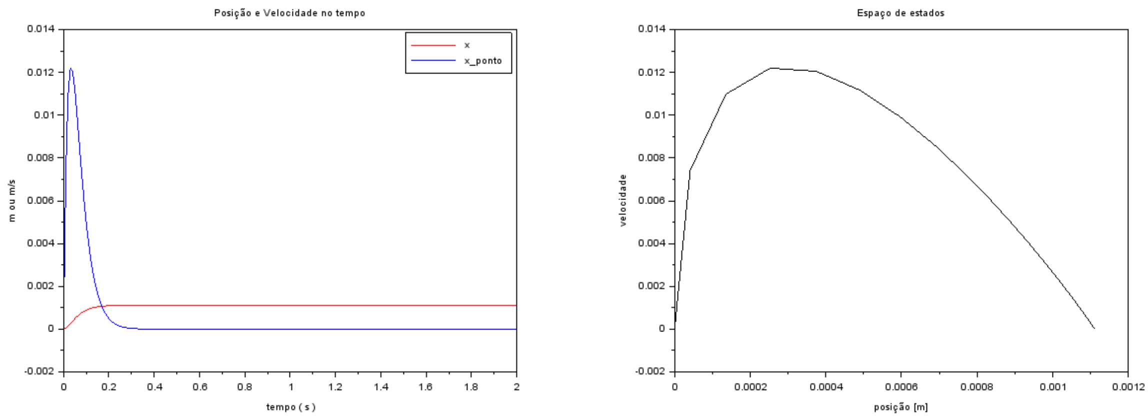

Figura 3 – Posição, velocidade e Espaço de Estados com $\zeta = 1$.

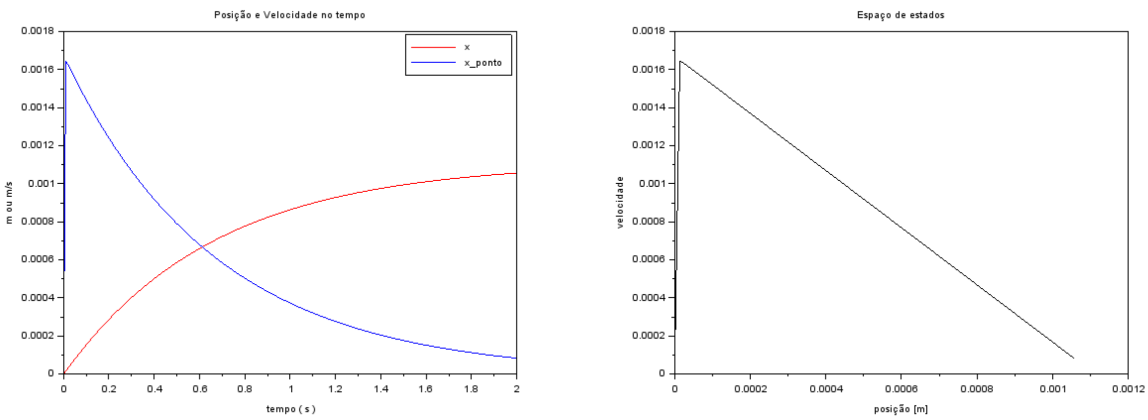

Figura 4 – Posição, velocidade e Espaço de Estados com $\zeta = 2$.

2 Primeira Questão

Obtém-se os autovalores da matriz A calculando as raízes do polinômio característico de A, dado por $det(A - I \cdot \lambda) = 0 \longrightarrow m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$.

Para os parâmetros $m = 1kg, k = 900N/m, eb = 6N.s/m$ ($\zeta = 0.1$), obtem-se os autovalores

$$\lambda_1 = -3 + 9\sqrt{11}i \;\; e \;\; \lambda_2 = -3 - 9\sqrt{11}i \tag{4}$$

Recordando a função de transferência $G(x)$ (Eq. 3), nota-se que o polinômio característico de A é o mesmo polinômio do denominador, logo possuem as mesmas raízes, chamadas de polos do sistema.

Calcula-se então a frequência natural do sistema, $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{900/1} = 30rad/s$, e a norma dos pólos do sistema $|\lambda| = \sqrt{3^2 + (9\sqrt{11})^2} = 30$ e verifica-se a igualdade.

A razão entre o módulo da parte real e a norma do polo do sistema deste é $3/30 = 0, 1$, que coincide com o coeficiente de amortecimento b.

Finalmente, calcula-se a frequência de oscilação do sistema, dada por $\omega\sqrt{1 - \zeta^2} = 30\sqrt{1 - 0.01} = 30\sqrt{99/100} = 9\sqrt{11}$, que coincide com o módulo da parte imaginária dos polos do sistema.

3 Segunda Questão

Rodou-se a simulação para diferentes conjuntos de parâmetros e condições iniciais e plotou-se o espaço de estados. Manteve-se a massa sempre em 1kg.

Na Figura 5, os parâmetros eram $k = 900N/m, c = 6Ns/m$, de modo que os dois polos são complexos. Na Figura 6, fez-se $k = 25N/m, c = 10Ns/m$, obtendo dois polos reais de mesmo valor. Por último, na Figura 7, fez-se $k = 20N/m, c = 15Ns/m$, obtendo dois polos reais e distintos.

Nas três figuras, as condições iniciais nulas estão representadas em preto, $(x, \dot{x}) = (0, 0.03)$ em azul e $(x, \dot{x}) = (0.01, 0)$ em vermelho.

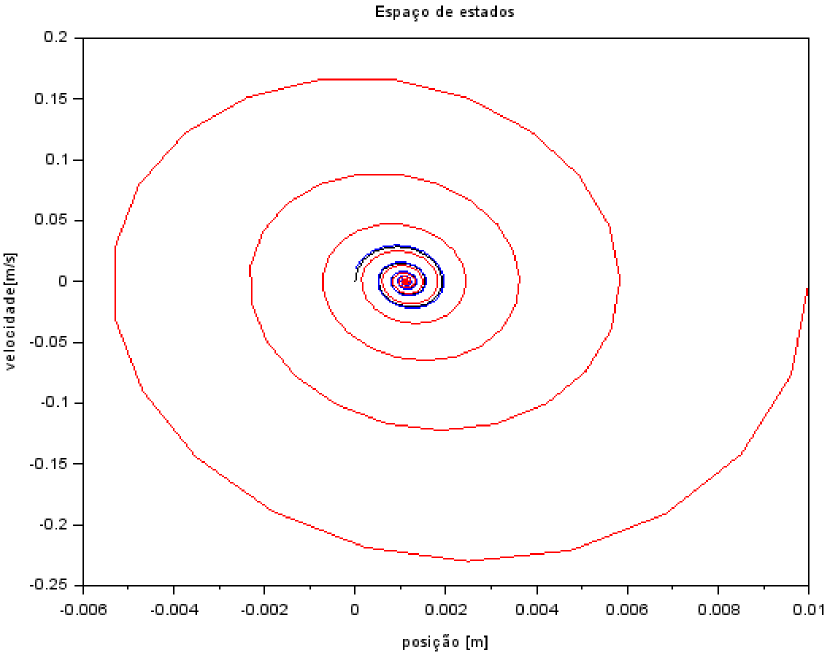

Figura 5 – Espaço de Estados com dois polos complexos.

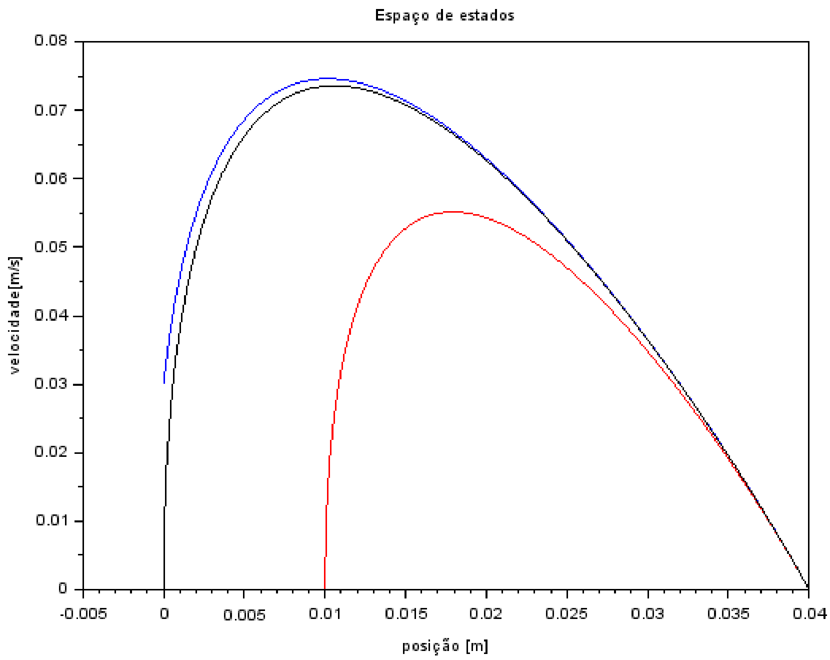

Figura 6 – Espaço de Estados com dois polos reais e iguais.

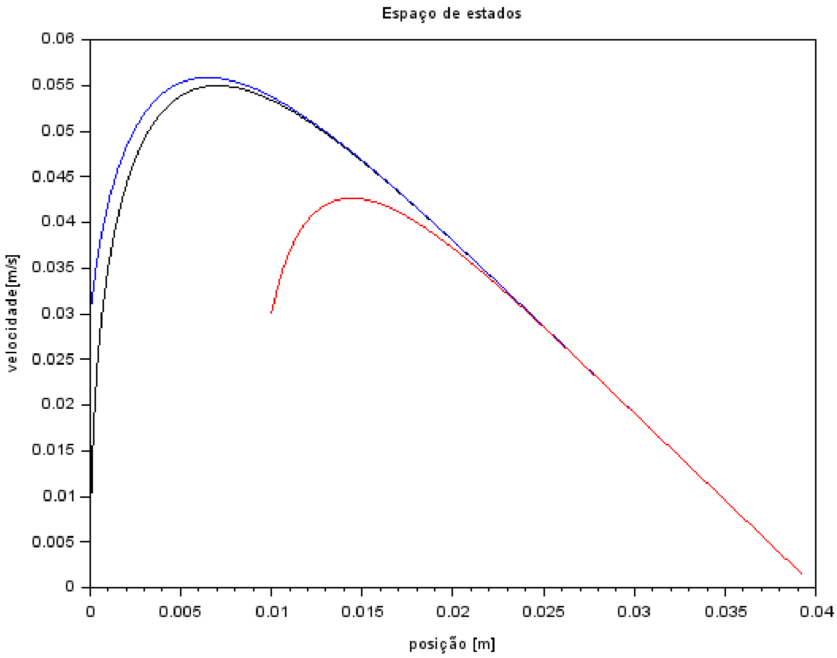

Figura 7 – Espaço de Estados com dois polos reais diferentes