Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Lista E de Modelagem de Sistemas Dinâmicos

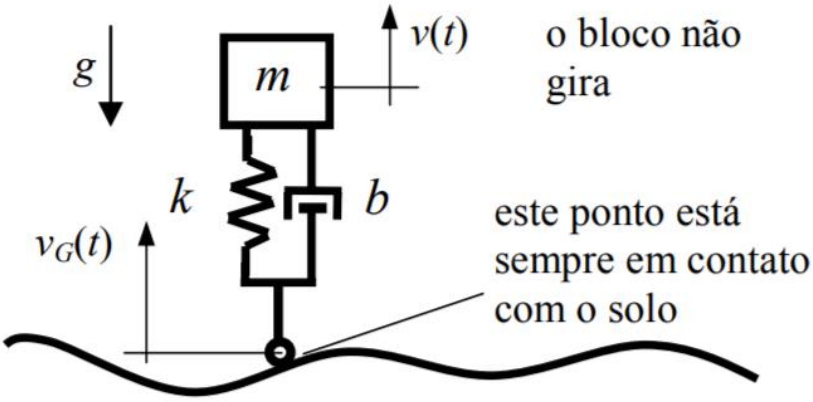
Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

Prof. Dr. Decio Crisol Donha

Gabriela Gomes Valejo Sanches NUSP: 10772592

Sumário

Exemplo



Esse exemplo é regido pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 - u \\ \dot{x_2} = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{b}{m}u \end{cases}$$

Sendo que x_1, x_2 e u representam desvios em relação ao equilíbrio:

$$x_1 = x - x_e$$

$$x_2 = v - v_e$$

$$u = v_G - v_{G_e}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{b}{m} \end{bmatrix} u$$

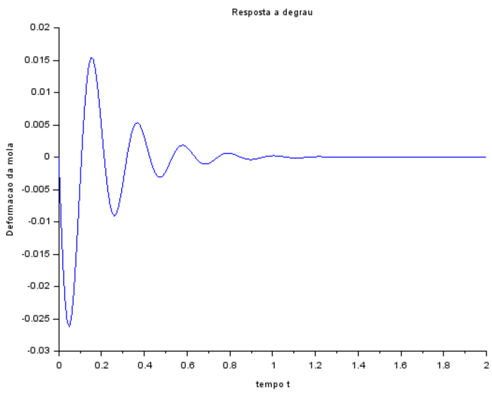
Após aplicar a transformada de Laplace e as condições iniciais nulas, obtém-se a função de transferência $G(s)$, que é uma função entre a transformada de Laplace da saída y e a transformada de Laplace da entrada u.

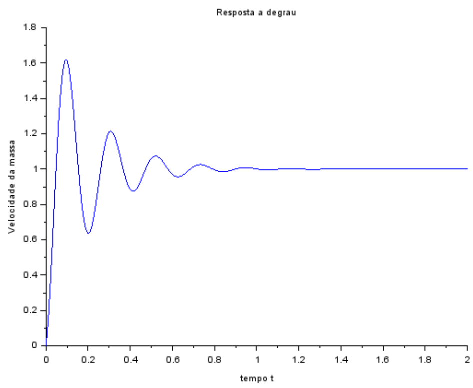
$$G(s) = -\frac{ms}{ms^2 + bs + k}$$

Para essa simulação, os parâmetros utilizados foram:

Parâmetros		
$M[kg]$	$b\left[\frac{Ns}{m}\right]$	$k\left[\frac{N}{m}\right]$
1	10	900

Neste caso, como $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$, sabe-se que o sistema é subamortecido, apresentando os seguintes resultados ao executar o código:

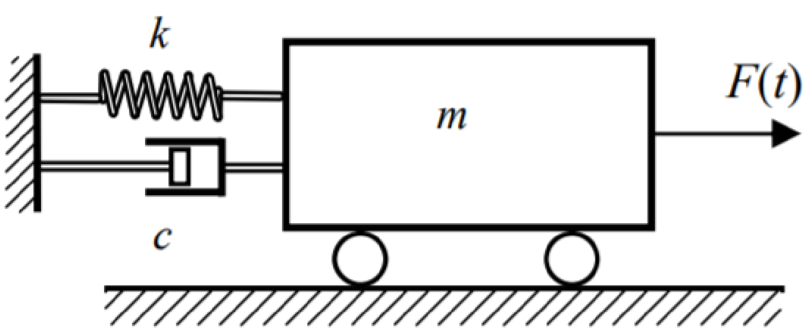




É evidente que tanto a velocidade da massa quanto a deformação da mola oscilam de modo que sua amplitude diminui gradativamente.

Exercício 1

Tendo em vista o seguinte sistema, intenciona-se obter suas equações de estado e sua função de transferência.



Esse sistema é regido pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t) \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

Após aplicar a transformada de Laplace, obtém-se a função de transferência $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

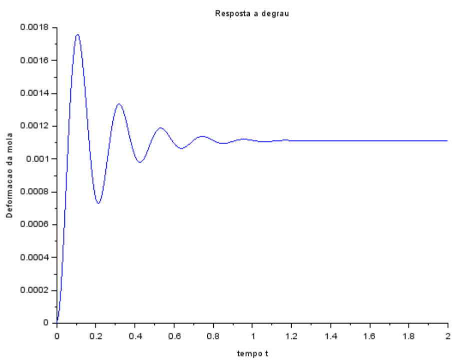
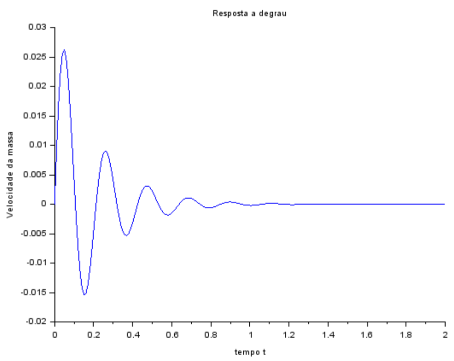
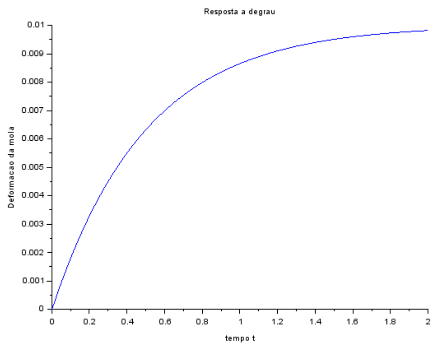
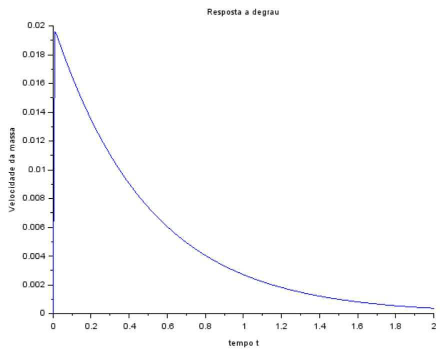
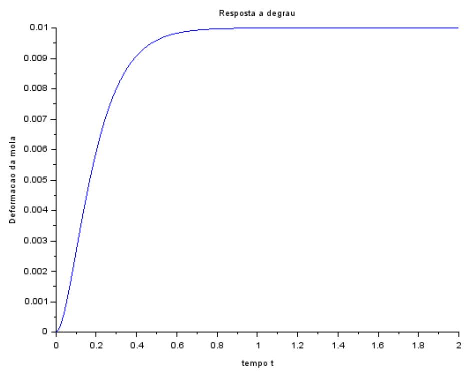
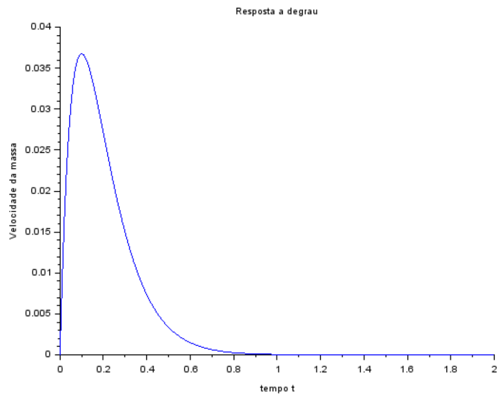
Deseja-se obter os resultados para três diferentes casos:

- $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1$: Sistema subamortecido;
- $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = 1$: Sistema com amortecimento crítico;
- $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} > 1$: Sistema superamortecido.

Para que esses valores fossem atingidos, houve variação dos valores de m, c e k tal como é apresentado na tabela a seguir:

Parâmetros			
Tipo de amortecimento	$M[kg]$	$c\left[\frac{Ns}{m}\right]$	$k\left[\frac{N}{m}\right]$
Subamortecido	1	10	900
Superamortecido	0.1	50	100
Amortecimento crítico	1	20	100

Os resultados do código executado são:

Parâmetros	
Sistema subamortecido	
	
Sistema superamortecido	
	
Sistema com amortecimento crítico	
	

Autovalores da matriz A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{c}{m} \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda + \frac{c}{m}\right) + \frac{k}{m} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Raízes do polinômio no denominador da função de transferência:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

É evidente que os autovalores e as raízes do polinômio são iguais, e são os polos do sistema.

Para o caso subamortecido $\left(\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} < 1\right)$ deseja-se obter os autovalores. Serão utilizados os parâmetros $m = 1kg$, $c = 10Ns/m$ e $k = 900N/m$.

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \Rightarrow \lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 3600}}{2}$$

$$\lambda_1 = -5 + 29.58i$$

$$\lambda_2 = -5 - 29.58i$$

Observa-se que ambos os autovalores são números complexos.

Frequência natural do sistema massa-mola-amortecedor:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{900} = 30$$

Coeficiente de amortecimento:

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{10}{2\sqrt{900}} = 0.166$$

Frequência de oscilação:

$$\omega = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 30\sqrt{1 - 0.166^2} = 29.58$$

Verifica-se que o módulo do número complexo é igual à frequência natural do sistema: $\sqrt{5^2 + 29.58^2} = 30 = \omega_n$. Além disso, a razão entre o módulo da parte real do número complexo com seu módulo é igual ao coeficiente de amortecimento: $5/30 = 0.166 =$

ξ. E a frequência de oscilação é igual ao módulo da parte imaginária do número complexo.

Exercício 2

Pretende-se utilizar o sistema anterior para três situações distintas: polos complexos, polos reais e iguais e polos reais e distintos. Para isso, é necessário verificar a parcela da raiz na solução dos autovalores, já apresentado anteriormente: $\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$.

- Para $c^2 - 4mk < 0$, temos polos complexos;
- Para $c^2 - 4mk = 0$, temos polos reais e iguais;
- Para $c^2 - 4mk > 0$, temos polos reais e distintos.

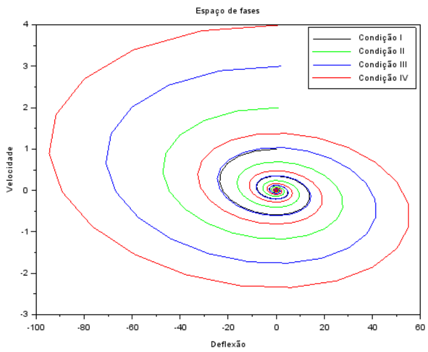
Para cada situação serão utilizados os seguintes parâmetros:

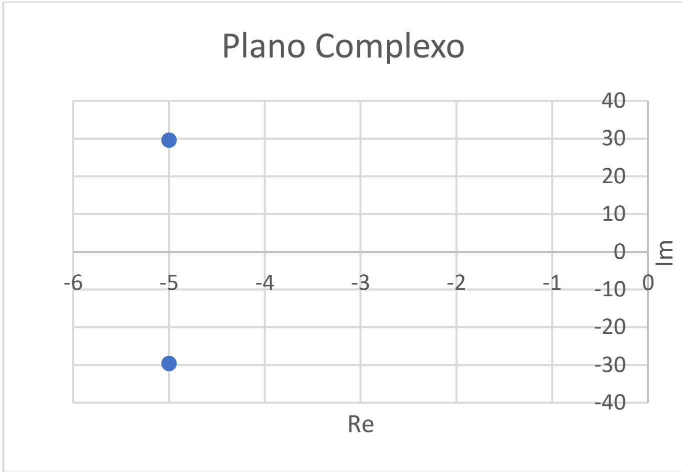
Parâmetros			
Polos	$M[kg]$	$c\left[\frac{Ns}{m}\right]$	$k\left[\frac{N}{m}\right]$
Complexos	1	10	900
Reais e iguais	1	20	100
Reais e distintos	1	50	100

Serão utilizadas as seguintes condições iniciais:

Condições iniciais		
Condições	Posição [m]	Velocidade [m/s]
I	1	0
II	2	1
III	3	2
IV	4	3

- Polos complexos:

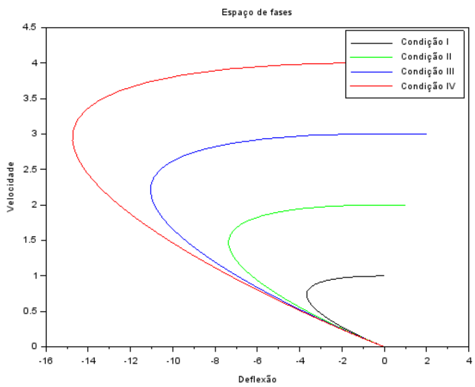


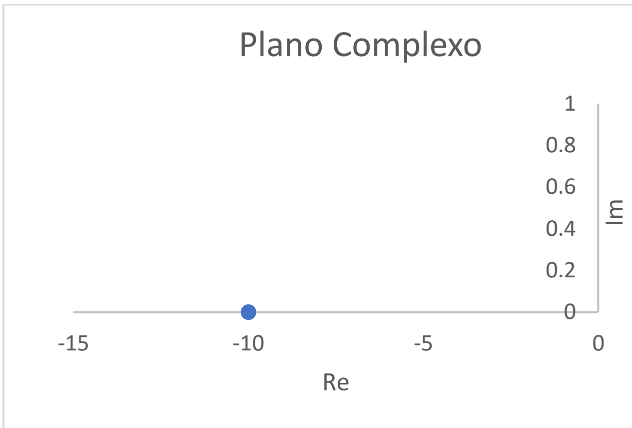


$$\lambda_1 = -5 + 29.58i$$

$$\lambda_2 = -5 - 29.58i$$

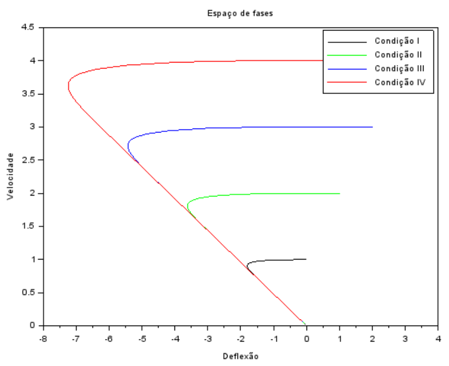
- Polos reais e iguais:

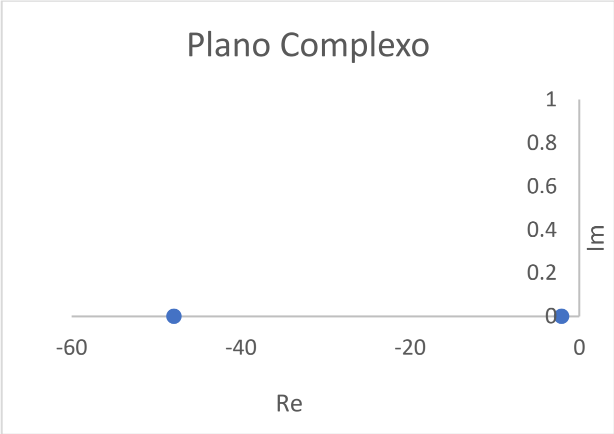




$$\lambda_1 = \lambda_2 = -10$$

- Polos reais e distintos





$$\lambda_1 = -2.087$$

$$\lambda_2 = -47.913$$

Apêndice

Exemplo

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;b=10;k=900;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -b/m];
B=[-1;b/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
```

```
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',2)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Velocidade da massa')
```

Exercício 1

```
// Definindo os parametros do sistema:
m=0.1;c=10;k=100;
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
// Definindo a entrada:
u=ones(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
// Mostrando o resultado da simulacao:
plot2d(t,y,2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Deformacao da mola')
// Podemos plotar o grafico do estado x2, por exemplo:
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',2)
// Mostrando o resultado da simulacao:
```

```
plot2d(t,x(2,:),2)
xtitle('Resposta a degrau','tempo t','Velocidade da massa')
```

Exercício 2

```
clear();
function [x]=Solucao(x0e, i, m, c, k, t)
// Matrizes do sistema:
A=[0 1; -k/m -c/m];
B=[0;1/m];
C=[1 0];
D=[0];
// Montando o sistema:
suspensao=syslin('c',A,B,C,D);
// Definindo a entrada degrau:
u=zeros(t);
// No espaco de estados temos 2 variaveis de estado:
//x0e=[0;0]; // neste caso, x1(0)=0 e x2(0)=0
// Alem de calcular a saida y, a função csim também permite obter o estado x:
[y,x]=csim(u,t,suspensao,x0e);
endfunction
// Definindo os parametros do sistema:
m=1;
c=50;
k=100;
// Definindo o vetor tempo:
t=0:0.01:2;
//condições iniciais que deseja analisar
x0=[1 2 3 4];
x0_linha=[0 1 2 3];
//resgatando o tamanho do vetor
qtd_cond=length(x0);
//vetores de resultados
X=zeros(qtd_cond,length(t));
V=zeros(qtd_cond,length(t));
for i=1:qtd_cond
 x0e=[x0(i);x0_linha(i)];
 [x]=Solucao(x0e,i,m,c,k,t)
 X(i,:)=x(1,:); //deflexão da mola
 V(i,:)=x(2,:); //velocidade da massa
end
// Abrindo uma nova janela de graficos:
xset('window',1)
// Plotando o resultados:
plot(V(1,:),X(1,:),"k",V(2,:),X(2,:),"g",V(3,:),X(3,:),"b",V(4,:),X(4,:),"r");
//colocando legendas
legend(["Condição I";"Condição II";"Condição III";"Condição IV"]);
xtitle("Espaço de fases","Deflexão","Velocidade");
```