PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

João Otávio Tanaka de Oliveira

NUSP:10772842

Era pedido para resolver numericamente em Scilab, as equações diferenciais que fazem a modelagem de um sistema dinâmico de dois reservatórios de água. Os parâmetros são: a área da seção transversal dos reservatórios S1 e S2, um parâmetro que relaciona vazão com queda de pressão R1 e R2, a massa específica da água ρ e a aceleração da gravidade G.

Já as variáveis são: vazão de entrada Q_e, o nível dos reservatórios h1 e h2, o volume de água nos reservatórios V1 e V2, e a pressão relativa no fundo dos reservatórios P1 e P2.

O sistema de equações diferenciais que deve ser resolvido é:

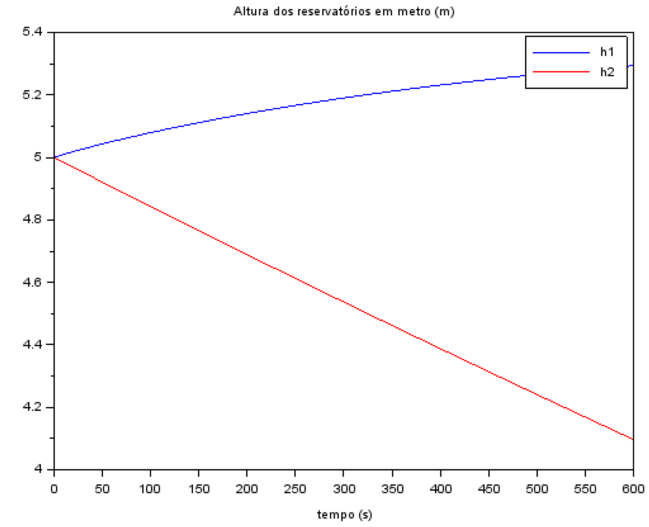
$$\dot{h_1} = \left[Q_e - \sqrt{\frac{\rho G (h_1 - h_2)}{R_1}} \right] \frac{1}{S_1}$$

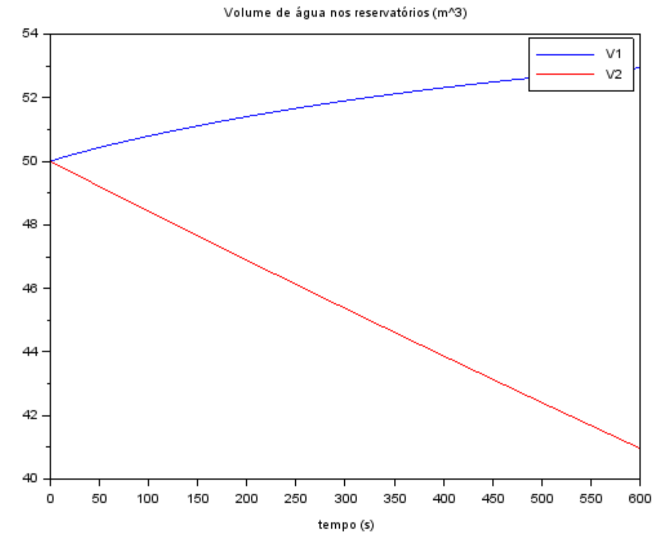
$$\dot{h_2} = \left[\sqrt{\frac{\rho G (h_1 - h_2)}{R_1}} - \sqrt{\frac{\rho G \mathrm{h}_2}{R_2}} \right] \frac{1}{S_2}$$

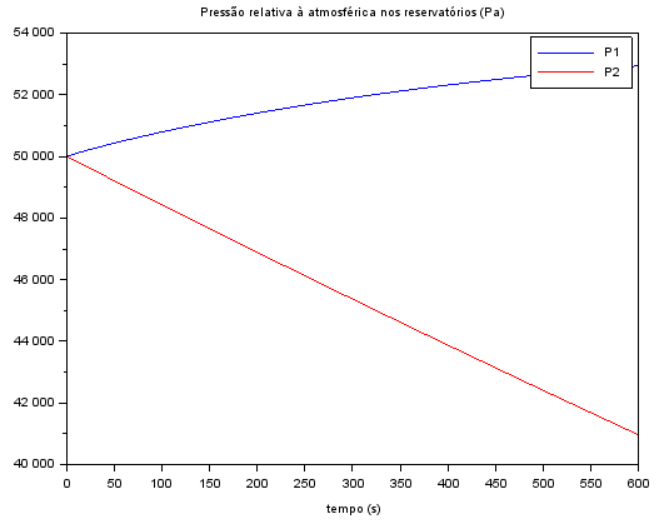
Foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros e condições iniciais:

```
//Parâmetros

S1 = 10.0; // área da seção transversal do tanque 1 em m^2
S2 = 10.0; // área da seção transversal do tanque 2 em m^2
R1 = 2*10^8; // perda de carga na tubulação do tanque 1 em Pa/(m^3/s)^2
R2 = 2*10^8; // perda de carga na tubulação do tanque 2 em Pa/(m^3/s)^2
rho = 1000.0; // massa específica da água em kg/m^3
G = 10.0; // aceleração da gravidade em m/s

//Variáveis

Qe = 0.010247; // vazão de entrada em m^3/s

//Condições iniciais

t0 = 0; //Instante inicial em s
tf = 600; //Instante final em s
h1(1) = 5; //Altura inicial do tanque 1 em m
h2(1) = 5; //Altura inicial do tanque 2 em m
h = 0.1; //Passo de integração
```

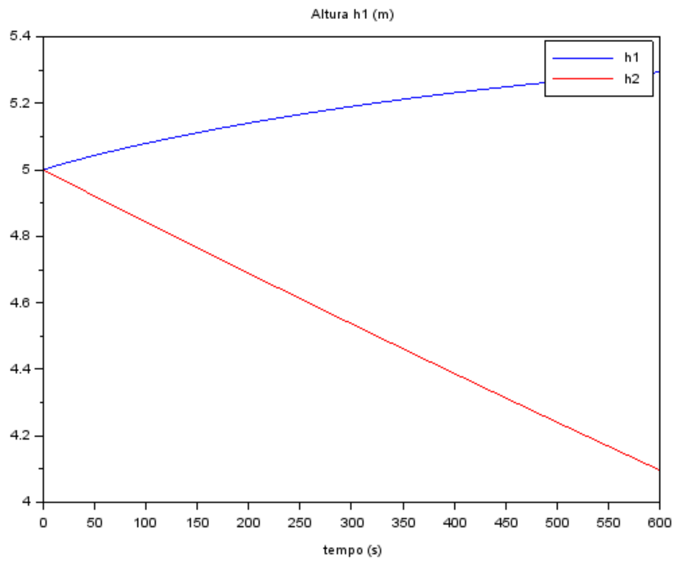
Inicialmente, resolveu-se o sistema de EDO pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem e obteve-se os seguintes gráficos:

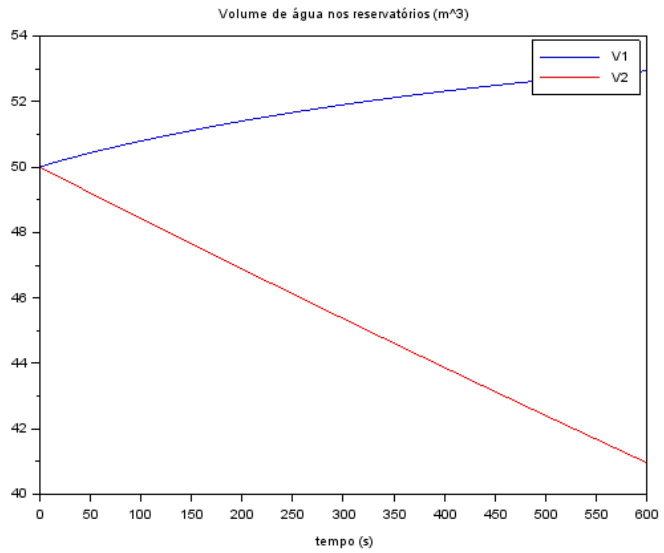


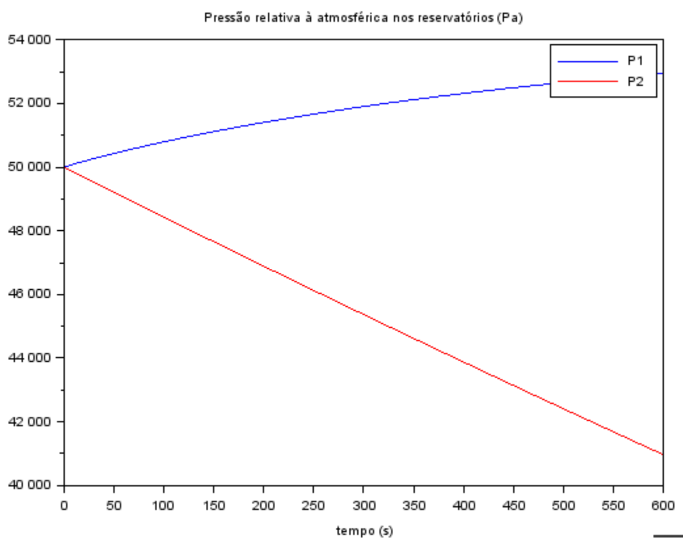




Então, resolveu-se o sistema pelo método de Euler e obteve-se os seguintes resultados:







Código em Scilab do método de Runge-Kutta:

```
xdel(winsid())
clear

//Parâmetros

S1 = 10.0; // área da seção transversal do tanque 1 em m^2
S2 = 10.0; // àrea da seção transversal do tanque 2 em m^2
R1 = 2*10^8; // perda de carga na tubulação do tanque 1 em Pa/(m^3/s)^2
R2 = 2*10^8; // perda de carga na tubulação do tanque 2 em Pa/(m^3/s)^2
rho = 1000.0; // massa específica da água em kg/m^3
G = 10.0; // aceleração da gravidade em m/s

//Variáveis

Qe = 0.010247; // vazão de entrada em m^3/s

//Condições iniciais

t0 = 0; //Instante inicial em s
tf = 600; //Instante final em s
h1(1) = 5; //Altura inicial do tanque 1 em m
h2(1) = 5; //Altura inicial do tanque 2 em m
h = 0.1; //Passo de integração

//Implementação da integração numérica por Runge-Kutta

n = round((tf-t0)/h); //número de passos
t = linspace(t0, tf, n+1); //vetor do tempo

for i = 1:n;
   k11 = h*(Qe - sqrt(rho*G*(h1(i) - h2(i))/R1))*(1/S1);
   k21 = h*(Qe - sqrt(rho*G*(h1(i) + k11/2 - h2(i))/R1))*(1/S1);
   k31 = h*(Qe - sqrt(rho*G*(h1(i) + k21/2 - h2(i))/R1))*(1/S1);
   k41 = h*(Qe - sqrt(rho*G*(h1(i) + k31 - h2(i))/R1))*(1/S1);
   h1(i + 1) = h1(i) + ((k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41)/6);

   k12 = h*((sqrt(rho*G*(h1(i) - h2(i)))/R1) - sqrt(rho*G*h2(i)/R2))*(1/S2);
   k22 = h*((sqrt(rho*G*(h1(i) - h2(i) + k12/2))/R1) - sqrt(rho*G*(h2(i) + k12/2)/R2))*(1/S2);
   k32 = h*((sqrt(rho*G*(h1(i) - h2(i) + k22/2))/R1) - sqrt(rho*G*(h2(i) + k22/2)/R2))*(1/S2);
   k42 = h*((sqrt(rho*G*(h1(i) - h2(i) + k32))/R1) - sqrt(rho*G*(h2(i) + k32)/R2))*(1/S2);
   h2(i + 1) = h2(i) + ((k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42)/6);
end

V1 = S1.*h1; // Volume do tanque 1 em m^3
V2 = S2.*h2; // Volume do tanque 2 em m^3

P1 = rho.*G.*h1 //Pressão relativa à atmosférica no fundo do reservatório 1 em Pa
P2 = rho.*G.*h2  //Pressão relativa à atmosférica no fundo do reservatório 2 em Pa

f1 = scf(1);
plot(t, h1);
plot(t, h2, "red");
legend("h1", "h2")
xtitle("Altura dos reservatórios em metro (m)", "tempo (s)", "")

f2 = scf();
plot(t, V1);
plot(t, V2, "red");
legend("V1", "V2")
xtitle("Volume de água nos reservatórios (m^3)", "tempo (s)", "")

f3 = scf(3);
plot(t, P1);
plot(t, P2, "red");
```

```
legend("P1", "P2")
xtitle("Pressão relativa à atmosférica nos reservatórios (Pa)", "tempo (s)", "")
```

Código em Scilab do método de Euler:

```
xdel(winsid())
clear

//Parâmetros

S1 = 10.0; // área da seção transversal do tanque 1 em m^2
S2 = 10.0; // àrea da seção transversal do tanque 2 em m^2
R1 = 2*10^8; // perda de carga na tubulação do tanque 1 em Pa/(m^3/s)^2
R2 = 2*10^8; // perda de carga na tubulação do tanque 2 em Pa/(m^3/s)^2
rho = 1000.0; // massa específica da água em kg/m^3
G = 10.0; // aceleração da gravidade em m/s

//Variáveis

Qe = 0.010247; // vazão de entrada em m^3/s

//Condições iniciais

t0 = 0; //Instante inicial em s
tf = 600; //Instante final em s
h1(1) = 5; //Altura inicial do tanque 1 em m
h2(1) = 5; //Altura inicial do tanque 2 em m
h = 0.1; //Passo de integração

//Implementação da integração numérica por Runge-Kutta

n = round((tf-t0)/h); //número de passos
t = linspace(t0, tf, n+1); //vetor do tempo

for i = 1:n;
  h1(i + 1) = h1(i) + h*(Qe - sqrt(rho*G*(h1(i) - h2(i))/R1))*(1/S1);

  h2(i + 1) = h2(i) + h*((sqrt(rho*G*(h1(i) - h2(i)))/R1) - sqrt(rho*G*h2(i)/R2))*(1/S2);
end

V1 = S1.*h1; // Volume do tanque 1 em m^3
V2 = S2.*h2; // Volume do tanque 2 em m^3

P1 = rho.*G.*h1 //Pressão relativa à atmosférica no fundo do reservatório 1 em Pa
P2 = rho.*G.*h2  //Pressão relativa à atmosférica no fundo do reservatório 2 em Pa

f1 = scf(1);
plot(t, h1);
plot(t, h2, "red");
legend("h1", "h2")
xtitle("Altura h1 (m)", "tempo (s)", "")

f2 = scf(2);
plot(t, V1);
plot(t, V2, "red");
legend("V1", "V2")
xtitle("Volume de água nos reservatórios (m^3)", "tempo (s)", "")

f3 = scf(3);
plot(t, P1);
plot(t, P2, "red");
legend("P1", "P2")
xtitle("Pressão relativa à atmosférica nos reservatórios (Pa)", "tempo (s)", "")
```