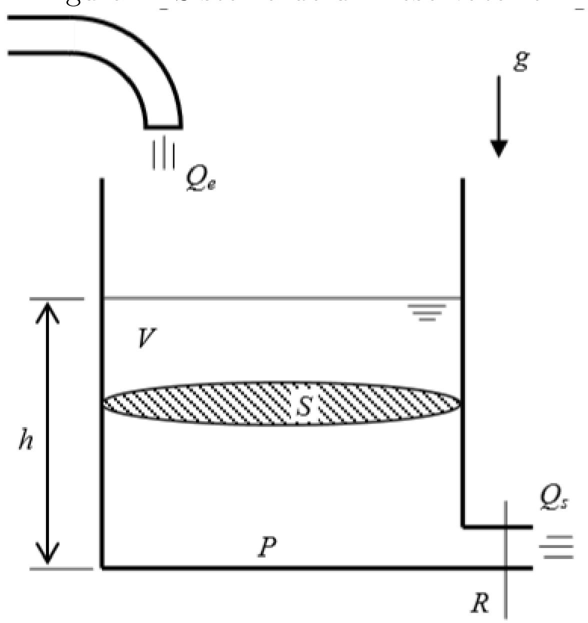
PME3380 - Lista B

Enzo Zugliani

2 de Setembro de 2020

- **Implemente um programa no Scilab que resolva numericamente a equação diferencial que modela o sistema abaixo, tanto pelo método de Euler como Runge Kutta.**

Figura 1: Sistema de um reservatório



O sistema pode ser representado pela equação 1, diferencial não linear, de primeira ordem .

$$\dot{h} = \left(-\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e \right) \frac{1}{S} \tag{1}$$

Para simular o sistema, utilizou-se os parâmetros da tabela 1:

Tabela 1: Parâmetros do sistema

S	$10\ m^2$
R	$2 \cdot 10^8\ Pa/(m^3/s)^2$
ρ	$1000\ kg/m^3$
G	$10\ m/s^2$
Q_e	$0,010247\ m^3/s$

Pelo método de Euler, a solução numérica pode ser obtida pelo algoritmo:

$$h(t + dt) = h(t) + dt \cdot \dot{h}(t) \tag{2}$$

Pelo método Runge-Kutta de quarta ordem, a solução numérica se dá pelo algoritmo:

$$k_1 = \dot{h}(h(t),\ t) \tag{3}$$
$$k_2 = \dot{h}(h(t) + 2dt \cdot k_1,\ t + 2dt) \tag{4}$$
$$k_3 = \dot{h}(h(t) + dt \cdot k_2,\ t + dt) \tag{5}$$
$$k_4 = \dot{h}(h(t) + dt \cdot k_3,\ t + dt) \tag{6}$$
$$h(t + dt) = h(t) + dt \cdot (k_1 + k_2 + 2k_3 + 2k_4)/6 \tag{7}$$

Os algoritmos implementados em *Matlab* estão apresentados na figura 2

Figura 2: Implementação dos algoritmos de integração

```
Tf = 30000;
dt = 500;
t = 0:dt:Tf;
h0 = 10;
h = zeros(1,length(t));
he(1) = h0;
hrk(1) = h0;
for i = 1:length(t)-1
    hp = (-sqrt((rho*G*he(i)/R))+Qe)/S;
    he(i+1) = he(i) + dt*hp;
end
for i = 1:length(t)-1
    k1 = (-sqrt((rho*G*hrk(i)/R))+Qe)/S;
    h1 = hrk(i)+k1*2*dt;
    k2 = (-sqrt((rho*G*h1/R))+Qe)/S;
    h2 = hrk(i)+k2*dt;
    k3 = (-sqrt((rho*G*h2/R))+Qe)/S;
    h3 = hrk(i)+k3*dt;
    k4 = (-sqrt((rho*G*h3/R))+Qe)/S;
    hrk(i+1) = hrk(i) + dt*(k1+k2+2*k3+2*k4)/6;
end
```

Plotou-se os dados obtidos , utilizando dois passos de integração diferentes, dt = 5s e dt = 500s. Os gráficos estão apresentados nas figuras 3 e 4

Figura 3: Simulação dt = 5s

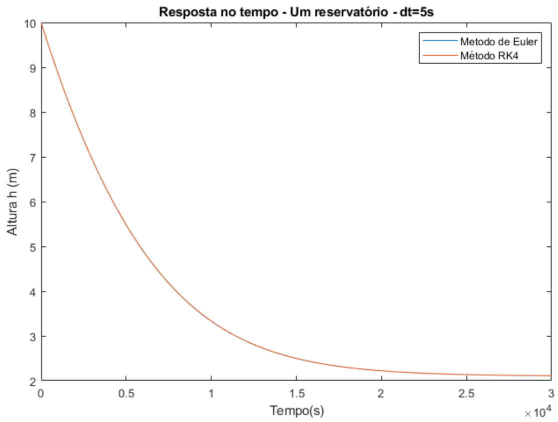
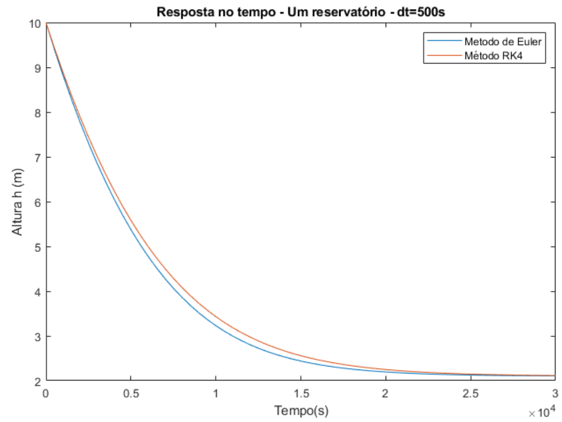


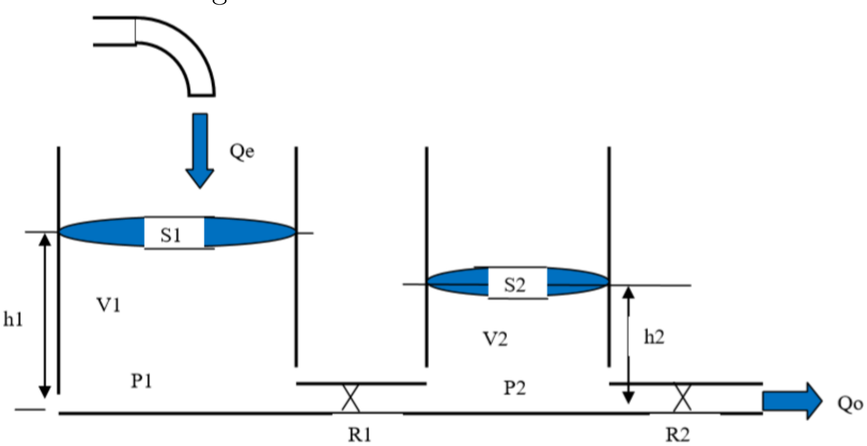
Figura 4: Simulação dt - 500s



Na simulação com passo maior, é evidente que o método de Euler resulta em uma solução "atrasada". O aumento da discretização no tempo mitiga esse efeito.

- **Desenvolva um programa em Scilab que resolva numericamente o sistema de equações diferencias que modela o sistema com dois reservatórios, usando tanto Euler como Runge Kutta. Dica: raciocine com vetores.**

Figura 5: Sistema de dois reservatório



O sistema de dois reservatórios pode ser representado pelo seguinte sistema de equações diferenciais não lineares:

$$\dot{h_1} = \left[Q_e - \sqrt{\frac{\rho G}{R_1}(h_1 - h_2)} \right] \frac{1}{S} \tag{8}$$

$$\dot{h_1} = \left[\sqrt{\frac{\rho G}{R_1}(h_1 - h_2)} - \sqrt{\frac{\rho G}{R_2} h_2} \right] \frac{1}{S} \tag{9}$$

A integração numérica é feita de modo semelhante ao das equações 1 a 7, porém com um vetor $h = [h1, h2]'$.

A implementação do algoritmo pode ser vista na figura 6.

Figura 6: Implementação dos algoritmos de integração - 2 Reservatórios

```
he(1,1) = h10;
he(2,1) = h20;
hrk(1,1) = h10;
hrk(2,1) = h20;
for i = 1:length(t)-1 %Metodo de Euler
    hp(1) = (Qe-sqrtt((rho*G*(he(1,i)-he(2,i)))/R))/S;
    hp(2) = (sqrtt((rho*G*(he(1,i)-he(2,i)))/R) - sqrtt((rho*G*he(2,i))/R))/S;
    he(:,i+1) = he(:,i) + dt*hp';
end
for i = 1:length(t)-1%Metodo RK4
    k1(1) = (Qe-sqrtt((rho*G*(hrk(1,i)-hrk(2,i)))/R))/S;
    k1(2) = (sqrtt((rho*G*(hrk(1,i)-he(2,i)))/R) - sqrtt((rho*G*hrk(2,i))/R))/S;
    h1 = hrk(:,i)+k1'*2*dt;
    k2(1) = (Qe-sqrtt((rho*G*(h1(1)-h1(2)))/R))/S;
    k2(2) = (sqrtt((rho*G*(h1(1)-h1(2)))/R) - sqrtt((rho*G*h1(2))/R))/S;
    h2 = hrk(:,i)+k2'*dt;
    k3(1) = (Qe-sqrtt((rho*G*(h2(1)-h2(2)))/R))/S;
    k3(2) = (sqrtt((rho*G*(h2(1)-h2(2)))/R) - sqrtt((rho*G*h2(2))/R))/S;
    h3 = hrk(:,i)+k3'*dt;
    k4(1) = (Qe-sqrtt((rho*G*(h3(1)-h3(2)))/R))/S;
    k4(2) = (sqrtt((rho*G*(h3(1)-h3(2)))/R) - sqrtt((rho*G*h3(2))/R))/S;
    hrk(:,i+1) = hrk(:,i) + dt*(k1'+k2'+2*k3'+2*k4')/6;
end
function y = sqrtt(x)
    if x<0
        y = -sqrt(-x);
    else
        y = sqrt(x);
    end
end
```

O resultado do código acima,apenas da simulação pelo método de Runge Kutta, pode ser visto nas figuras 7 a 10, com diferentes condições iniciais. Utilizou-se os mesmos parâmetros para ambos os reservatórios.

Figura 7: Simulação 1

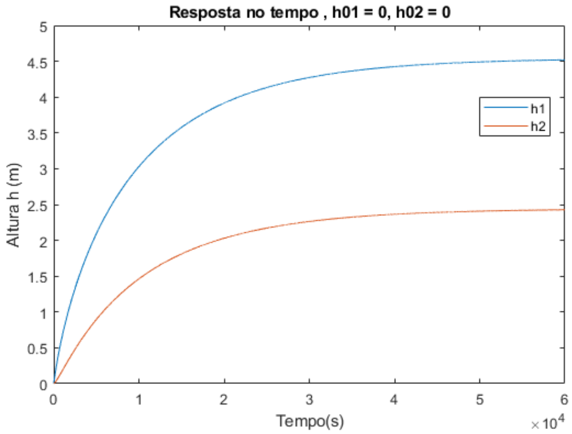


Figura 8: Simulação 2

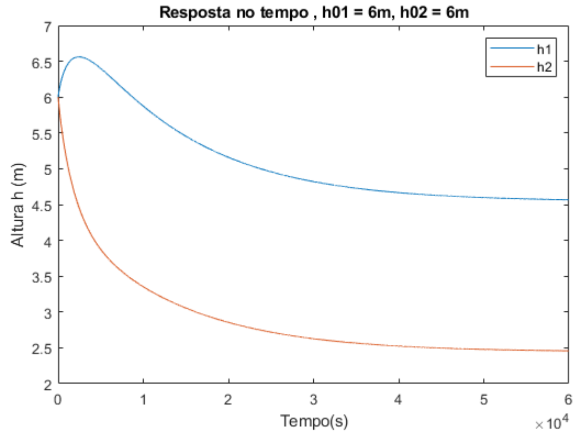


Figura 9: Simulação 3

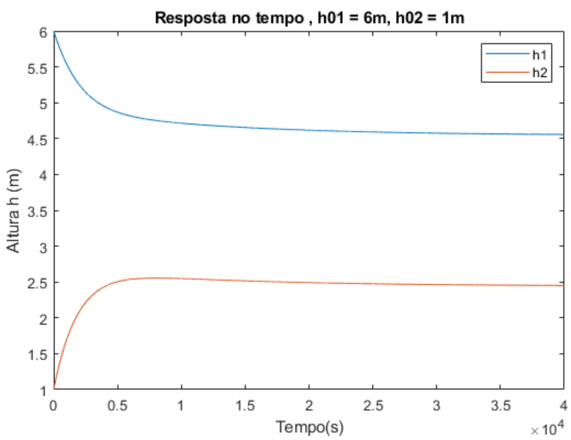
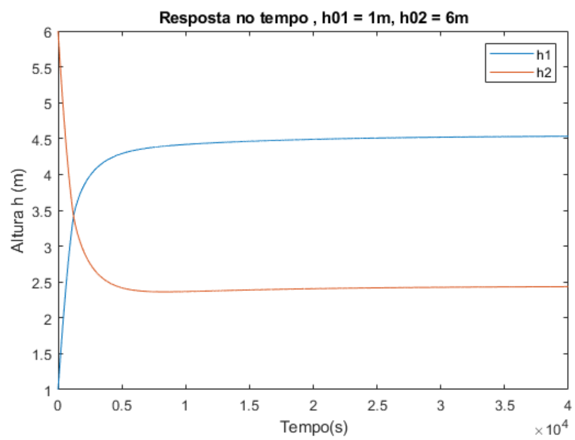


Figura 10: Simulação 4



Nota-se que independente da condição inicial, o sistema é levado para os mesmos valores de h1 e h2 em regime permanente.