

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA – DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Lista 2

Pedro Leonel Giannoni de Oliveira

Número USP: 10335569

São Paulo

2020

1) Exercício 1:

Implemente um programa no Scilab que resolva numericamente a equação diferencial que modela o sistema abaixo, tanto pelo método de Euler como Runge Kutta.

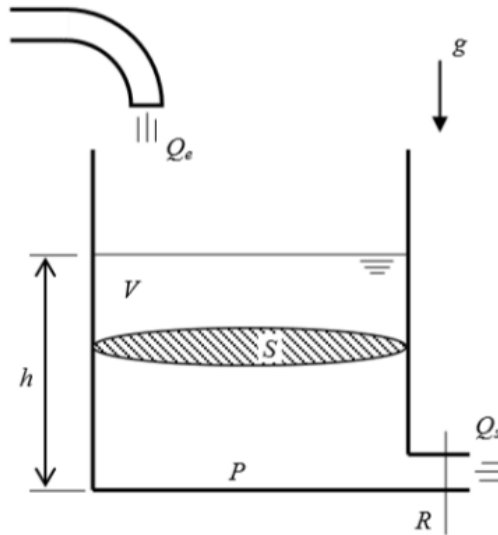


Figura 1 - Reservatório do exercício 1

Assim, podem ser definidos os parâmetros para a resolução do sistema:

$$Q_e = 0,010247 \frac{m^3}{s};$$

$$S = 10 \text{ m}^2;$$

$$R = 2 \cdot 10^8 \frac{Pa}{\left(\frac{m^3}{s}\right)^2};$$

$$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3};$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2};$$

$$h(0) = 10 \text{ m}.$$

A equação diferencial não linear e de primeira ordem que rege o sistema é a seguinte:

$$\dot{h} = \left(-\sqrt{\frac{\rho g h}{R}} + Q_e \right) \frac{1}{S}$$

Aplicando o método de Euler, a solução numérica da equação é obtida pela equação:

$$h(t + dt) = h(t) + dt \cdot \dot{h}(t)$$

Já pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, a solução numérica é obtida pelas equações:

$$\begin{aligned} k_1 &= \dot{h}(h(t), t) \\ k_2 &= \dot{h}(h(t) + 2dt \cdot k_1, t + 2dt) \\ k_3 &= \dot{h}(h(t) + dt \cdot k_2, t + dt) \\ k_4 &= \dot{h}(h(t) + dt \cdot k_3, t + dt) \\ h(t + dt) &= h(t) + dt \cdot (k_1 + k_2 + 2k_3 + 2k_4)/6 \end{aligned}$$

Com isso, simulou-se pelo software Scilab um programa que resolve numericamente as equações:

```
//PME3380 - Lista 2
//Exercício 1

clear

//Parâmetros
Qe = 0.010247 //m³/s
S = 10 //m²
R = 2*10^8 //Pa/(m³/s)²
ro = 1000 //kg/m³
g = 10 //m/s²

//Tempo
dt = 1 //Passo de integração
tf = 25000
t = 0:dt:tf

n = round(tf/dt)

//Resolução numérica das equações diferenciais pelo método de Euler
he(1) = 0.0
for i = 1:n
    he(i+1) = he(i) + dt*(Qe - sqrt(ro*g*he(i)/R))/S
endfor
```

```
end
```

```
//Resolução numérica das equações diferenciais pelo método de Runge Kutta
```

```
hr(1) = 0.0
```

```
for i = 1:n
```

```
    k1 = dt*(Qe-sqrt(ro*g*he(i)/R))/S
```

```
    k2 = dt*(Qe-sqrt(ro*g*(he(i)+k1/2)/R))/S
```

```
    k3 = dt*(Qe-sqrt(ro*g*(he(i)+k2/2)/R))/S
```

```
    k4 = dt*(Qe-sqrt(ro*g*(he(i)+k3)/R))/S
```

```
    hr(i+1) = hr(i) + ((k1+2*k2+2*k3+k4)/6)
```

```
end
```

```
//Plotagem dos gráficos
```

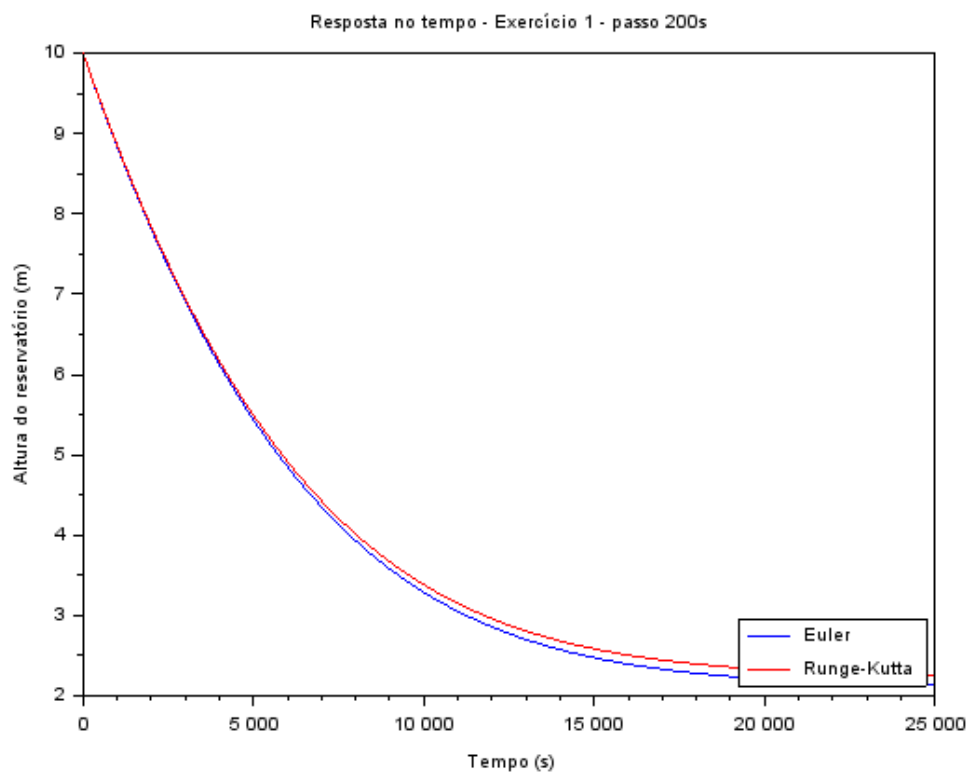
```
scf(0)
```

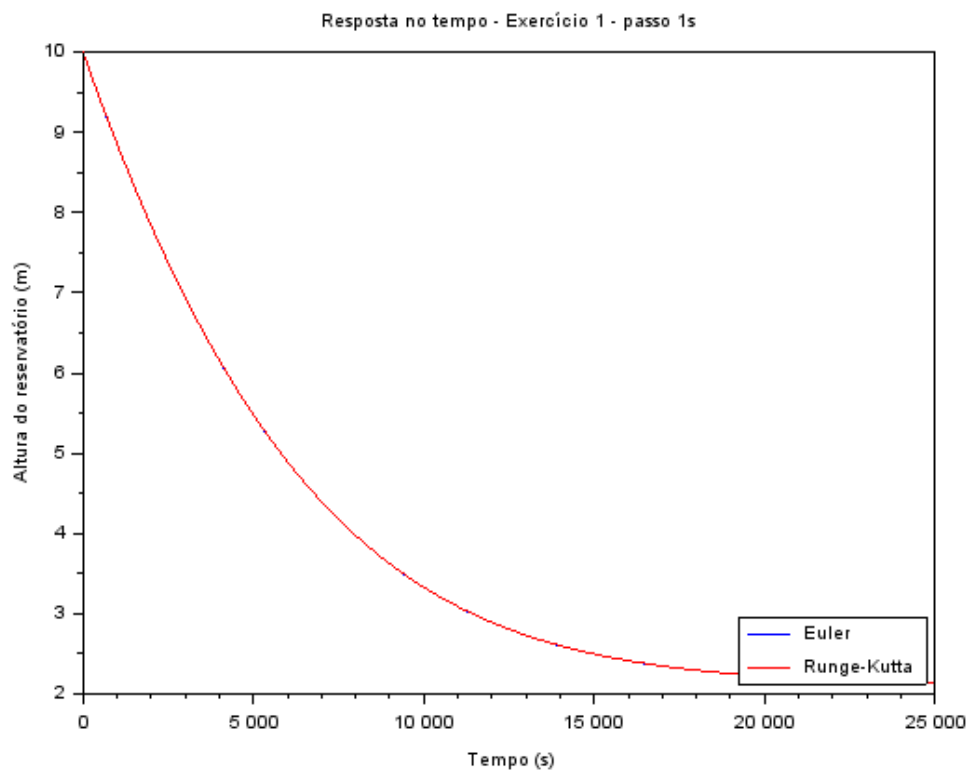
```
plot(t,he)
```

```
plot(t,hr,"r")
```

```
xtitle("Resposta no tempo - Exercício 1 - passo 1s", "Tempo (s)", "Altura do reservatório (m)")
```

Respostas gráficas:





Percebe-se que quando o passo de integração é diminuído, ou seja, aumenta-se a discretização no tempo, o método de Euler deixa de estar “adiantado” com relação ao método de Runge-Kutta.

2) Exercício 2

Desenvolva um programa em Scilab que resolva numericamente o sistema de equações diferenciais que modelo o sistema com dois reservatórios, usando tanto Euler como Runge-Kutta. Dica: raciocine com vetores.

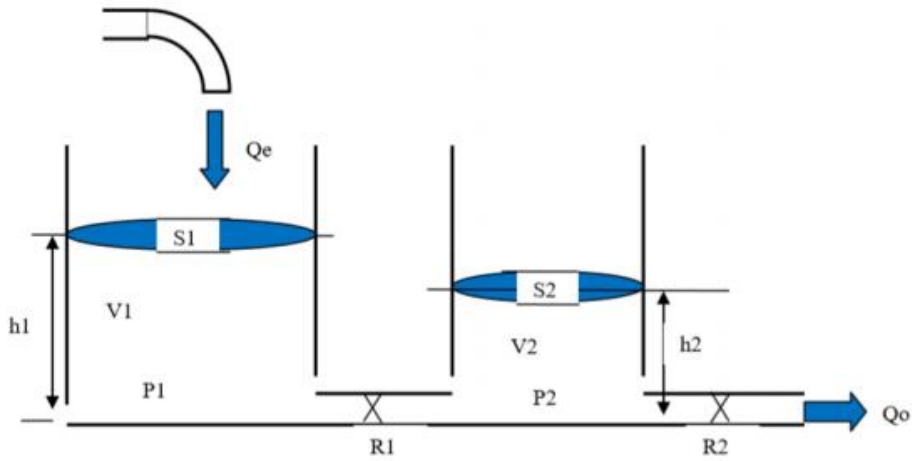


Figura 2 - Sistema com dois reservatórios

Assim, podem ser definidos os parâmetros para a resolução do sistema:

$$Q_e = 0,010247 \frac{m^3}{s};$$

$$S_1 = 10 m^2; S_2 = 5 m^2;$$

$$R_1 = R_2 = 2 \cdot 10^8 \frac{Pa}{\left(\frac{m^3}{s}\right)^2};$$

$$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3};$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2};$$

$h_1(0)$ e $h_2(0)$ variando em cada caso.

Equações diferenciais não lineares que regem o sistema:

$$\dot{h}_1 = \left[Q_e - \sqrt{\frac{\rho \cdot g}{R_1}} (h_1 - h_2) \right] \frac{1}{S}$$

$$\dot{h}_2 = \left[\sqrt{\frac{\rho \cdot g}{R_1}} (h_1 - h_2) - \sqrt{\frac{\rho \cdot g}{R_2}} h_2 \right] \frac{1}{S}$$

Analogamente ao exercício anterior, aplica-se o método de Euler e Runge-Kutta em ambas as equações para resolver o sistema e obter sua solução numérica. O programa em Scilab pode ser visto a seguir:

```
//PME3380 - Lista 2
//Exercício 2
```

```
clear
```

```
//Parâmetros
```

```
Qe = 0.010247 //m³/s
S1 = 10 //m²
S2 = 5 //m²
R1 = 2*10^8 //Pa/(m°/s)²
R2 = 2*10^8 //Pa/(m°/s)²
ro = 1000 //kg/m³
g = 10 //m/s²
```

```
//Tempo
```

```
dt = 500 //Passo de integração
tf = 50000
t = 0:dt:tf
```

```
n = round(tf/dt)
```

```
//Resolução numérica das equações diferenciais pelo método de Euler
```

```
he1(1) = 0.0
he2(1) = 0.0
for i = 1:n
    he1(i+1) = he1(i) + dt*(Qe - sqrt(ro*g*(he1(i) - he2(i))/R1))/S1
    he2(i+1) = he2(i) + dt*(sqrt(ro*g*(he1(i) - he2(i))/R1) - sqrt(ro*g*he2(i)/R2))/S2
end
```

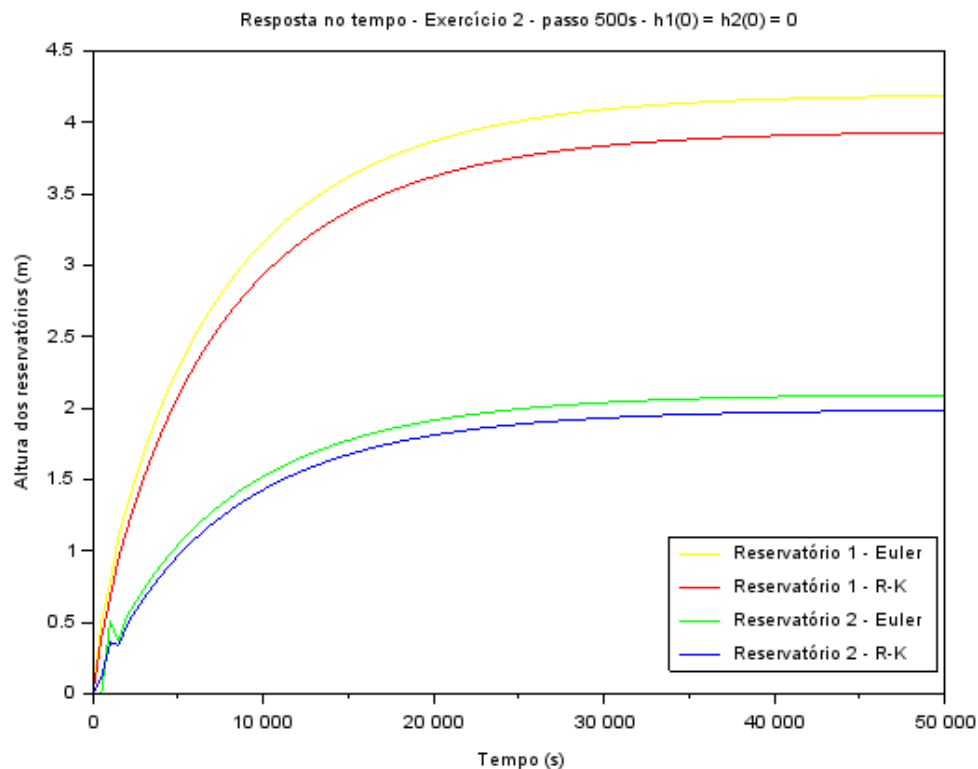
```
//Resolução numérica das equações diferenciais pelo método de Runge Kutta
```

```
hr1(1) = 0.0
hr2(1) = 0.0
for i = 1:n
    k11 = dt*(Qe - sqrt(ro*g*(he1(i) - he2(i))/R1))/S1
    k12 = dt*(sqrt(ro*g*(he1(i) - he2(i))/R1) - sqrt(ro*g*he2(i)/R2))/S2
    k21 = dt*(Qe - sqrt(ro*g*((he1(i) + k11/2) - (he2(i) + k12/2))/R1))/S1
    k22 = dt*(sqrt(ro*g*((he1(i) + k11/2) - (he2(i) + k12/2))/R1) - sqrt(ro*g*(he2(i) + k12/2)/R2))/S2
    k31 = dt*(Qe - sqrt(ro*g*((he1(i) + k21/2) - (he2(i) + k22/2))/R1))/S1
    k32 = dt*(sqrt(ro*g*((he1(i) + k21/2) - (he2(i) + k22/2))/R1) - sqrt(ro*g*(he2(i) + k22/2)/R2))/S2
    k41 = dt*(Qe - sqrt(ro*g*((he1(i) + k31) - (he2(i) + k32))/R1))/S1
    k42 = dt*(sqrt(ro*g*((he1(i) + k31) - (he2(i) + k32))/R1) - sqrt(ro*g*(he2(i) + k32)/R2))/S2
    hr1(i+1) = hr1(i) + ((k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41)/6)
    hr2(i+1) = hr2(i) + ((k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42)/6)
end
```

```
//Plotagem dos gráficos
```

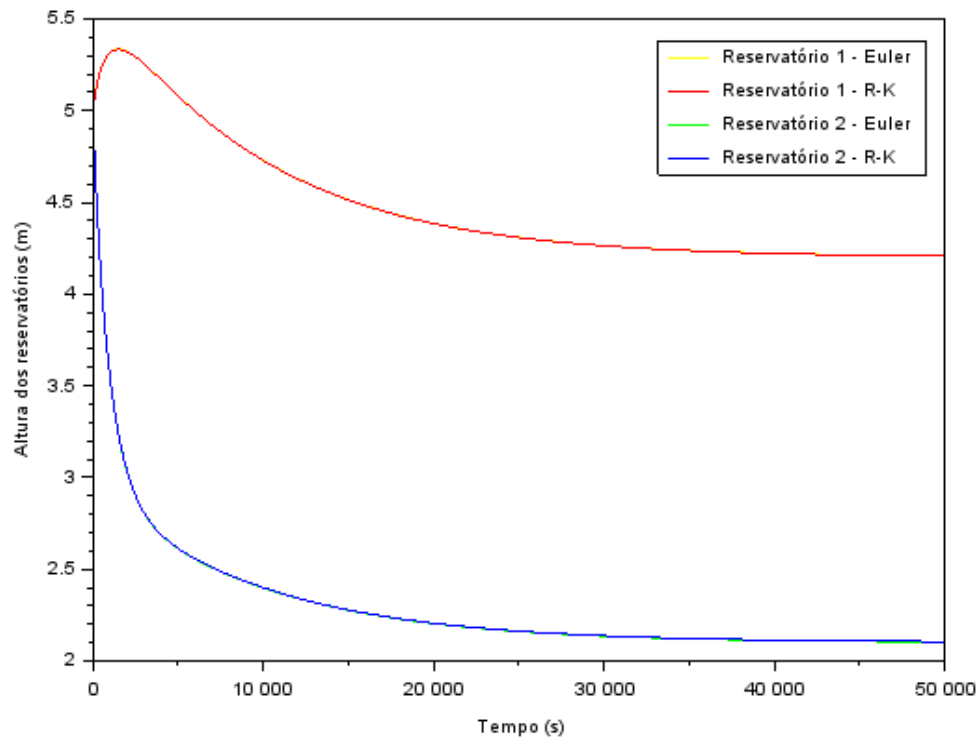
```
scf(0)
plot(t,he1, "y")
plot(t,hr1, "r")
plot(t,he2, "g")
plot(t,hr2, "b")
xtitle("Resposta no tempo - Exercício 2 - passo 500s - h1(0) = h2(0) = 0", "Tempo (s)", "Altura dos reservatórios (m)")
legends(["Reservatório 1 - Euler", "Reservatório 1 - R-K", "Reservatório 2 - Euler", "Reservatório 2 - R-K"], [7,5,3,2], 5)
```

Assim, foram simuladas as equações diferenciais das alturas de ambos os reservatórios para alturas iniciais diferentes. Vale ressaltar que, para um passo de integração de 1s, as curvas obtidas pelo método de Euler e pelo método de Runge-Kutta são praticamente idênticas, estando sobrepostas nos gráficos. Tais curvas podem ser vistas separadas na primeira imagem, em que se aumentou o passo de integração para 500s para assim notar-se a diferença entre cada método, considerando a altura inicial nula de ambos os reservatórios.

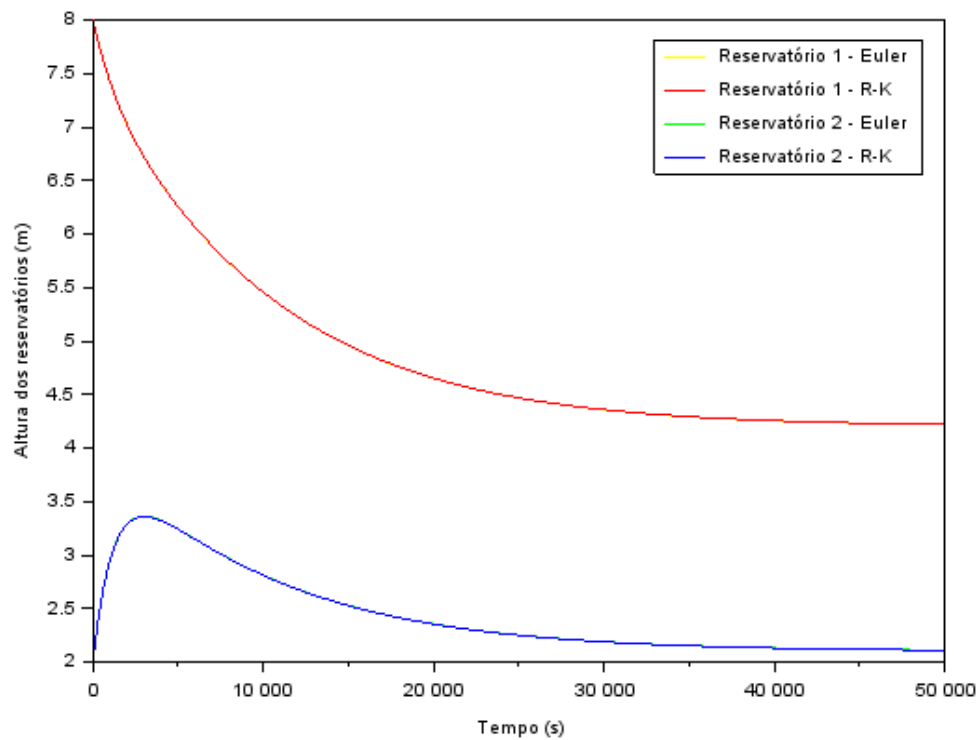


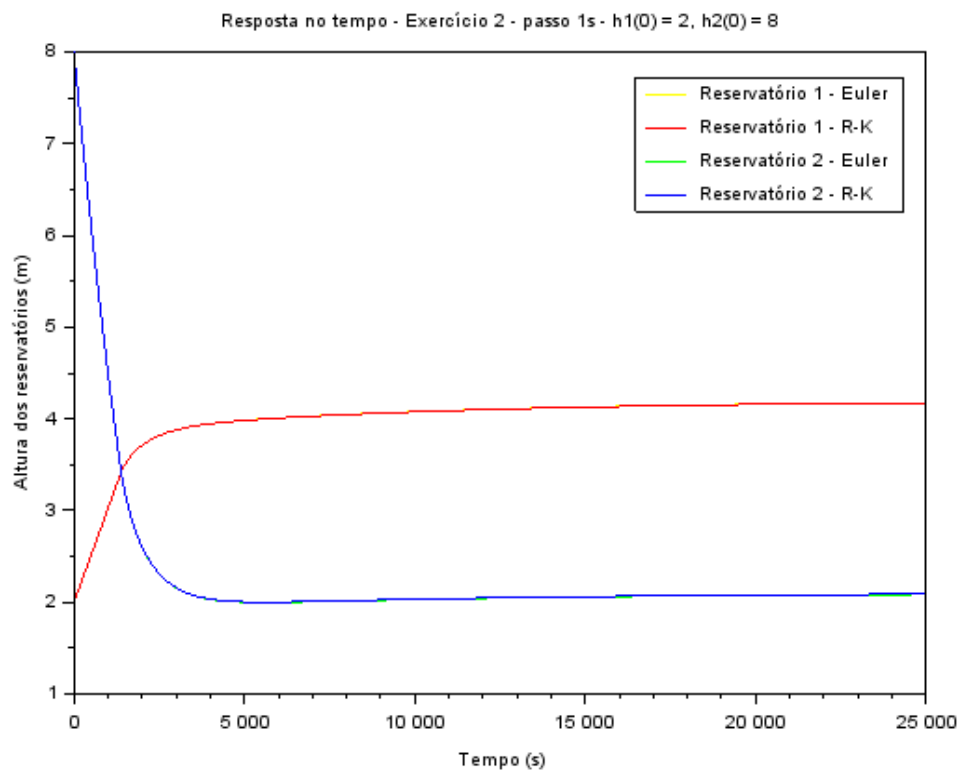
Para os próximos casos, em que as alturas iniciais de cada reservatório foram alteradas, foi utilizado um passo de 1s, o que sobrepôs as curvas para os métodos de Euler e Runge-Kutta.

Resposta no tempo - Exercício 2 - passo 1s - $h_1(0) = 5$, $h_2(0) = 5$



Resposta no tempo - Exercício 2 - passo 1s - $h_1(0) = 8$, $h_2(0) = 2$





Assim, percebe-se que, independente da condição inicial, o sistema converge para as alturas de reservatório $h_1 = 4\text{m}$ e $h_2 = 2\text{m}$.