Geometria não-Euclidiana

Luiz Gustavo Mugnaini Anselmo
n°USP: 11809746
Cálculo 1 - Oscar João Abdounur

Junho 2020

Conteúdo

1 Motivação

A escolha do tema *geometria não-euclidiana* foi motivada pelo interesse em conhecer extensões da aplicação do ferramental proporcionado pelo Cálculo diferencial e integral em áreas mais gerais da matemática, se estendendo a geometrias além das quais comumente são apresentadas em um curso introdutório ao cálculo ou até mesmo em um curso introdutório à geometria. O trabalho a seguir não tem como objetivo criar uma base sólida nas ideias apresentadas, mas sim trazer uma visão holística sobre o tema. A seção 2 tem como objetivo uma apresentação histórica do tema, passando pelas motivações do descobrimento dessas novas geometrias até tentativas de formalização dessas novas ideias matemáticas. A seção 3 tem o objetivo de apresentar ideias indiretamente e diretamente fundamentais para o pensamento e a evolução da formalização da geometria não-euclidiana. Na seção 4 nos ocupamos em trazer um olhar conceitual sobre o que tratam as ideias introduzidas por Riemann e outros responsáveis pelo desenvolvimento da área, chegando a mostrar, por fim, como podemos estender o uso do cálculo para o estudo de variedades.

2 Descobrimento da Geometria não-Euclidiana

2.1 O quinto postulado

O grande matemático Euclides de Alexandria, durante a escrita de seu livro *Elementos*, se pôs a desenvolver uma série de cinco postulados que seriam capazes de criar um sistema dedutivo tal que todo teorema fosse consequência da união de tais postulados. Esses postulados foram interpretados pelos geômetras gregos como inegáveis, consistentes e imprescindíveis para que fosse possível ser desenvolvida a geometria estudada até então, desconsiderando a necessidade de provas formais para assegurar a veracidade de tais afirmações matemáticas.

O quinto postulado, ou postulado sobre paralelismo, diz que:

> Considere uma reta r em $\mathbb{R}^2$ e um ponto P não pertencente à reta r. É dito que existe uma única reta r_1 em $\mathbb{R}^2$ tal que $P \in r_1$ e que r_1 é paralela a reta r.

Por um grande período de tempo um dos objetivos centrais de matemáticos que dispunham seu tempo a pensar sobre geometria era o de provar o quinto postulado de Euclides utilizando-se apenas dos outros quatro disponíveis.

2.2 Nova formulação do quinto postulado

Na atualidade, sabemos que os postulados de Euclides não são um sistema completo como se imaginou por muito tempo. O responsável por criar uma série de cinco axiomas capazes de gerar uma geometria (euclidiana) consistente, conhecidos como "Axiomas de Hilbert", foi David Hilbert (1862 - 1962), em seu livro intitulado *Grundlagen der Geometrie* (1899) - em português "Os Fundamentos da Geometria". Os postulados são: 1. Axioma da Incidência, 2. Axioma de Ordem, 3. Axioma de Congruência, 4. Axioma de paralelismo, 5. Axioma de Continuidade. O quarto axioma é o que aqui nos interessa; ele diz que

Considere um plano Π um ponto $P \in \Pi$ e uma reta $u \subset \Pi$ tais que $P \notin u$. Existe uma única reta v que contém P tal que $v \cap u = \varnothing$. Essa reta v é dita paralela a u pelo ponto P.

2.3 Novas geometrias

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), um dos nomes mais proeminentes da história da matemática, foi talvez o primeiro a se debruçar na possibilidade da existência de uma geometria que obedeça todos os postulados de Euclides, exceto o quinto, sobre paralelismo. Uma geometria não obedecer o quinto postulado gera uma consequência na possibilidade da existência de mais de uma linha com as propriedades descritas pelo postulado, quebrando com a ideia de unicidade.

Cartas enviadas de Gauß para Franz Adolph Taurinus (1794 - 1874) e János Bolyai (1802 - 1860) demonstram que Gauß não estava completamente satisfeito com a geometria que ele teria construído a partir do momento que não se era mais assumido como verdadeiro o quinto postulado de Euclides, ele se duvidava da veracidade dos fundamentos da geometria, e isso pode ser uma das explicações que levaram Gauß à não publicação de seus trabalhos no desenvolvimento da geometria não-euclidiana.

Em meados de 1830, Bolyai e Nikolai Lobachevsky (1792 - 1856) publicaram trabalhos indicando a possibilidade de criar geometrias consistentes que não obedecem o quinto postulado, a geometria hiperbólica era o maior interesse de ambos. Entretanto, seus os trabalhos não foram levados a sério por seus contemporâneos uma vez que Euclides e seus trabalhos eram tidos como quase sagrados e praticamente inquestionáveis.

Algo interessante a se notar é o fato de que a existência de geometrias não-euclidianas se remontam a tempos tão longínquos como a fundação da geometria euclidana, a mais famosa e importante delas é a geometria esférica, estudada incessantemente por astrônomos.

Eugenio Beltrami (1835 - 1900), em sua publicação *Essay on an interpretation of non-Euclidean geometry* (1868), se preocupou em de fato fundar toda aquela geometria apresentada por Bolyai e Lobachevsky. Em *Fundamental theory of spaces of constant curvature*, Beltrami foi capaz de dar maior consistência a geometria hiperbólica utilizando o que hoje conhecemos como *modelo de Beltrami-Klein* - que se trata de uma representação projetiva daquilo que representava a geometria hiperbólica.

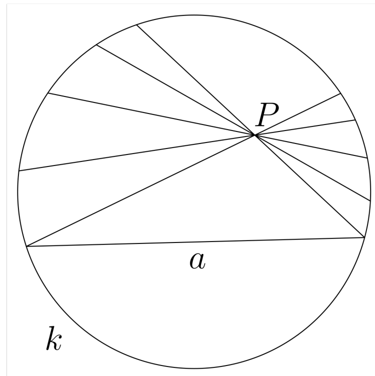

Figura 1: Modelo de Beltrami-Klein para geometria hiperbólica

3 Curvaturas - conceitos não-euclidianos escondidos

Agora vamos olhar o que estava sendo desenvolvido por Gauß durante seus estudos sobre geometria que, apesar de não citar o nome "geometria não-euclidiana", conduziu avanços para a área e demonstra que provavelmente Gauß tinha conhecimento que suas descobertas davam origem a um novo espaço, com propriedades de homogeneidade e isotropia. O exemplo que será conduzido nessa seção traz uma conexão entre o estudo de superfícies e geometria não-euclidiana plana, além do ferramental do cálculo para esse estudo.

Iremos analisar agora aquilo que conhecemos como *teorema de Gauß-Bonnet*, responsável por abrir portas para a criação da análise global, campo da matemática que estuda análise sobre variedades - sendo uma mistura de topologia, análise e geometria diferencial. Para entender sobre o que se trata o teorema, primeiro devemos introduzir o conceito de *curvatura gaussiana*, que se baseia nas curvaturas principais de um certo ponto e diz o quão curvada é uma superfície. Dado um ponto contido em uma certa superfície, podemos criar um *vetor normal* à superfície naquele ponto (isso é verdade para toda superfície?) e planos tais que contenham esse vetor normal (sendo esses planos chamados de *planos normais*). Podem existir infinitos desses planos descritos anteriormente, porém, nos ocuparemos com aqueles com a seguinte propriedade: todos esses planos formam com a superfície uma curva, em sua intersecção (veja a figura 2); escolheremos aquelas curvas que possuem máxima e mínima curvatura, que são as curvaturas principais k_1 e k_2. Os valores de máximo e mínimo são os autovalores da matriz de operação da superfície, da

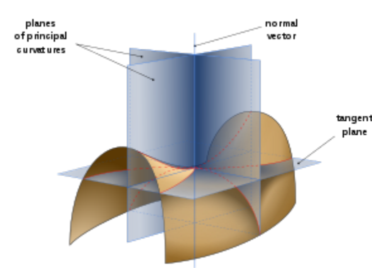

Figura 2: Superfícies, planos e curvas.

qual não iremos discorrer nesse trecho.

A curvatura gaussiana é então definida como o produto de k_1 e k_2:

$$K = k_1 k_2 \tag{1}$$

O teorema de Gauß-Bonnet diz que a integral da curvatura gaussiana sobre a superfície de um objeto é dado por:

$$\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S) \tag{2}$$

Onde S é a superfície do objeto em questão e o último termo em (2) é o que descrevemos como *característica de Euler*. Para poliedros temos uma simples formulação de χ:

$$\chi = V - E + F \tag{3}$$

Onde V, E, F são, respectivamente, o número de vértices, arestas e faces do poliedro estudado. Para poliedros simples com todas as suas faces em conexão simples, a característica de Euler é igual a:

$$V - E + F = 2 \tag{4}$$

A igualdade (4) é um pouco mais comum e ensinada no ensino fundamental. A característica de Euler entretanto se estende de maneira mais geral e possui uma formulação na área de topologia que possibilita o estudo dos mais interessantes objetos portanto, aqui vão alguns exemplos de objetos que não possuem esta mesma característica de Euler e também se encaixam na geometria não euclidiana:

1. O toro triplo apresenta característica de Euler $\chi = -4$:

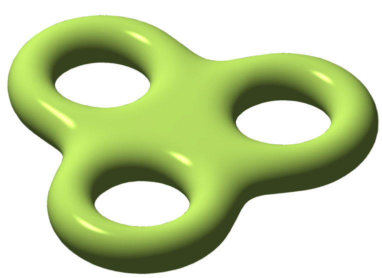

Figura 3: Toro triplo

2. A fita de Möbius possui característica de Euler $\chi = 0$

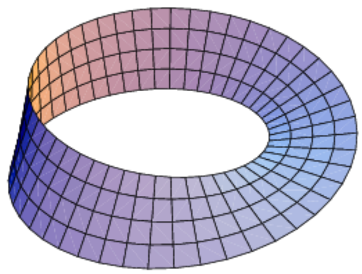

Figura 4: Fita de Möbius

Vimos que, portanto, Gauß já se ocupava em pensar sobre curvaturas, porém, poderia ainda ter receio de apresentar seus estudos sobre o tópico. Foi apenas Riemann, protagonista da próxima seção, que foi o responsável por dar corpo àquilo que Gauß chamava de um abalo às fundações da geometria (e por vezes, como relatado em cartas a outros matemáticos da época, até pensou que fosse possível que a geometria não trouxesse verdades). De fato, a curvatura gaussiana (1) se relaciona diretamente com o tipo de geometria que estamos lidando. De acordo com a análise de K podemos afirmar que:

1. Quando a superfície possui curvatura gaussiana nula constante, a superfície é passível de ser transformada em um plano sem a necessidade de distorcê-la. Temos portanto uma geometria euclidiana para $K = 0$.

2. Quando a superfície é tal que $K > 0$ em toda sua extensão, segue que temos uma esfera e estamos lidando com uma geometria esférica (não euclidiana).

3. Quando para a superfície temos $K < 0$ durante toda sua extensão, teremos uma superfície pseudoesférica e uma geometria hiperbólica.

4 Variedades

4.1 Conceitos fundamentais

Foi Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), discípulo de Gauß, que foi responsável por trazer maior solidez os fundamentos da geometria não euclidiana. Para tanto, Riemann se pôs ao trabalho de definir aquilo que chamamos de *variedade* (ou mais comumente encontrado como *manifold*, em inglês).

Definiremos informalmente uma variedade como um objeto (mais precisamente, um conjunto) M tal que localmente todos os conjuntos abertos U de M satisfazem a propriedade de existir uma função bijetora φ que mapeia todos os elementos de U para o espaço euclidiano. Uma melhor visualização disso é mostrada na figura 3.

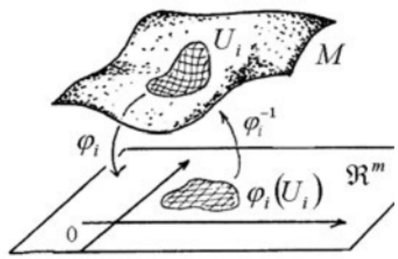

Figura 5: Mapeamento de uma variedade M de dimensão m para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$.

Variedades podem ser divididas em *cartas*, que são objetos que possuem um homeomorfismo $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ (função contínua que possui inversa também contínua) capaz de levar o conjunto aberto $U \subseteq M$ ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$. Geralmente cartas são denotados por (U, φ). O *atlas* deu uma variedade é definida como a união $\bigcup_\alpha (U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Uma variedade de dimensão d, portanto, é tal que podemos introduzir em um ponto qualquer $p \in U_\alpha$ um sistema de coordenadas $(x_{i_\alpha})_{i_\alpha = 1_\alpha}^{d_\alpha}$ e de tal forma poderemos descrever as coordenadas de um ponto $p_1 \in U_\alpha$ próximo a p com tais coordenadas.

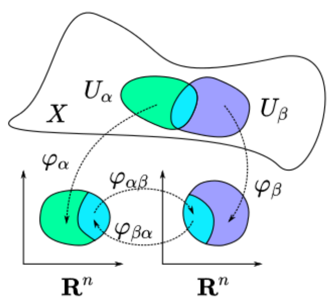

Figura 6: Cartas de transição $\varphi_{\alpha\beta}$ e $\varphi_{\beta\alpha}$ (ou, pela nossa notação, $\tau_{\alpha\beta}$ e $\tau_{\beta\alpha}$) de uma variedade X e conjuntos abertos U_α e U_β

Cartas de transição são modos pelos quais podemos comparar as cartas de dois conjuntos U_α e U_β de um atlas. Para tanto, é necessário que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, uma vez que, para comparar as duas cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) precisamos que os domínios de φ_α e φ_β tenham intersecção não nula. Definimos então a função carta de transição de U_α em U_β como $\tau_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ dada por $\tau_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

Riemann ainda introduziu as *métricas de Riemannianas*. Métricas são funções capazes de definir distâncias entre pares de elementos em um dado conjunto. Sendo assim, as métricas de Riemann proporcionaram a possibilidade de estudar variedades por meio dos antigos conceitos de distância, ângulos, áreas e volumes de maneira local, como descrito anteriormente. Para ter uma noção global do objeto estudado em questão, devemos tomar integrais sobre aquilo que desejamos informação, onde nos vêm novamente o ferramental essencial que nos fornece o cálculo diferencial e integral.

4.2 Variedades diferenciáveis - Cálculo em variedades

No estudo de variedades, temos objeto matemático que chamamos de *variedade diferenciável*, que é um tipo de variedade com a propriedade de, localmente - ou seja, para toda carta (U, φ) de M - se assemelhar a um espaço vetorial, que, classicamente, nos possibilita desenvolver toda a teoria do cálculo sobre superfícies. Para que sejamos capazes de introduzirmos uma estrutura diferencial global à variedade, é necessário que todas as cartas de transformação $\tau_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$ de quaisquer $U_\alpha, U_\beta \subseteq M : U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ sejam diferenciáveis.

O que significa para uma carta de transformação ser diferenciável no contexto de variedades? Uma função real f sobre uma variedade M de dimensão n é dita diferenciável em um ponto $p \in U \subseteq M$ se (U, φ) é uma carta diferenciável e

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R} \tag{5}$$

é diferenciável em $\varphi(p)$.

5 Considerações finais

Por meio deste presente trabalho foi possível compreender desde a história por trás da criação da geometria não-euclidiana, tendo protagonistas como Gauß, Bolyai, Lobatchevsky, Beltrami e Riemann, como também alguns conceitos chave que cercam o estudo das geometrias não-euclidianas, essenciais na área de geometria diferencial, topologia e diversas outras áreas abarcadas por essas grandes áreas de estudo dentro da matemática. Pudemos ver também a importância fundamental do ferramental proporcionado pelo cálculo diferencial e integral no desenvolvimento dessas novas geometrias.