UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Lucas Santos da Silva

N.USP: 10704397

História da Geometria Analítica

Do Contexto à Aplicação

São Paulo, SP

2020

Este trabalho tem como objetivo apresentar de forma clara e objetiva os pontos principais para o entendimento da história da Geometria Analítica, passando desde os pontos mais próximos no contexto histórico da época até as aplicações práticas que atualmente têm evoluído continuamente.

A divisão em três partes se fez necessária para o melhor entendimento: Parte 1: Análise do Contexto Histórico e a Necessidade da Geometria Analítica; Parte 2: O Método de Descartes e o Esforço de Fermat; Parte 3: Conclusão

Na parte 1 é mostrado o caminho que a geometria percorreu durante a história humana, saindo de uma matéria de necessidade prática ao governo de uma grande nação, até chegar como necessidade intelectual para resolução de problemas que não eram práticos, mas, que despertavam a curiosidade natural e inata do ser humano.

Na parte 2 é mostrado o desafio real que estava por trás das decisões de Descartes para desenvolver essa nova forma de enxergar a Geometria, um trabalho árduo que envolvia não somente a parte da ambição matemática que esse curioso gênio possuía, mas, uma necessidade de mostrar sua vertente filosófica também. Ainda nessa parte, é mostrado brevemente a correlação da Geometria Analítica e o Cálculo, com Pierre de Fermat mostrando seus métodos para descrever lugares geométricos e o problema de máximos e mínimos.

Na parte 3, última, mas, não menos importante, é mostrado como a interconexão das vertentes da geometria se tornaram importantes ferramentas nas ciências contemporâneas, com aplicações que passam desde Física Clássica até mesmo a mais pura análise de cristais na Química, e sua relação com o estudo do Cálculo que temos atualmente.

1. Introdução

1.1. Nascimento da Geometria como Necessidade Política.

Inúmeras teorias e deduções foram feitas desde os escritos de Heródoto (485 a.C – 425 a.C), geógrafo e historiador grego conhecido como o “Pai da História”, acerca da história da matemática e uma de suas principais vertentes tradicionais, a geografia. Embora Heródoto afirme que a origem da matemática é diretamente proporcional às necessidades do mundo antigo egípcio, diversos outros historiadores afirmam que antes mesmo dos egípcios já havia vestígios de uso de anotações para estudar problemas ou analisar formas. Como é o caso dos Sumérios, uma das primeiras civilizações humanas da qual temos conhecimento direto por meio de vestígios de linguagem. Uma pedra encontrada em Susa, antiga cidade persa do leste do Rio Tigres, como mostrada na figura 1, vemos claramente uma análise escrita em pedra com uma forma complexa montada, esse artefato data precisamente o período de 2000 a.C, o que é mais antigo que o registro encontrado no Egito, que data 1650 a.C.

Figura 1 – Pedra com forma geométrica de Susa. (>2000 a.C)

Apesar da controvérsia causada por Heródoto ao afirmar que a história da matemática está diretamente relacionada com o seu uso prático no Egito Antigo, há muita verdade nessa afirmação! Estudos relacionados com o por quê o povo egípcio usava dos recursos fornecidos pela matemática, vemos que o nascimento da matemática, mais necessariamente o nascimento da Geometria, é diretamente relacionado com o fato desse povo necessitar de um sistema confiável para lidar com um problema político extremamente complexo e importante para o funcionamento da economia que lhes era contemporânea, o uso e atribuição das terras egípcias, para que fossem cobrados os impostos da nação, era necessário estipular um sistema que fosse plausível e justo para criar um valor baseado no tamanho de seu terreno. Mesmo que fossem estipulados sistemas com passos e marcações precisas. Ainda sim havia o problema do transbordo do rio Nilo, um problema que além de causar danos no povo egípcio no que tange saúde de plantações e do povo, também causava problemas nas marcações, uma vez que as apagava a cada nova enchente. O rio Nilo ter essa característica permitiu que as terras daquela região fossem as mais férteis para se plantar e conquistar alimentos para um povo sedentário, porém, esse problema de apagar as demarcações era tamanho, que na famosa obra antiga “Livro dos Mortos” é mostrado que na cultura deles acreditava-se que o recém falecido precisava jurar aos deuses que não havia pegado mais do que lhe fora entregue de porção de terra.

Para contornar isso, os faraós antigos, governadores egípcios, criaram os cargos de “fiscais”, chamados de Agrimensores, responsáveis por irem com suas longas cordas e demarcar novamente as terras ou até mesmo de medi-las constantemente para evitar problemas. Nesse processo, eles criavam técnicas de demarcar usando triângulos, retângulos e figuras afins. Este importante momento se tornou a chave para que o povo grego, um povo intelectual e que amava discutir, usasse o uso da geometria para resolver *puzzles,* problemas que eram resolvidos apenas como exaltação de intelectualidade.

1.2. Axiomatização da Geometria, Euclides, a primeira influência filosófica na matemática.

Descartes criou boa parte da geometria analítica em busca de aplicar o seu curioso método de dedução filosófica, porém, essa não foi a primeira vez que a filosofia se mostra importante para o desenvolvimento mais pragmático da matemática. É muito provável que essa primeira aparição tenha se dado no momento que o povo helênico (os gregos) passou a analisar a matemática como a própria etimologia da palavra nos sugere (Arte da Compreensão), o que era suposto de acontecer ao ter um povo que era muito afinco as discussões acerca de temas sociais e intelectuais.

Euclides (300 a.C - ???) fora um matemático grego conhecido por ser o “Pai da Geometria”, em um mundo onde todos usavam de lógica para irem de encontro com as argumentações, em uma nação onde Sócrates debatia arduamente com os sofistas, e o calor humano era exaltado em sua forma intelectual, Euclides encontrou uma missão curiosa para argumentar acerca de questões que envolviam construções geométricas, desafios que exigiam o uso apenas de régua e compasso, não que os gregos fossem um povo que apenas possuíam essas tecnologias na época, mas, porque o desafio intelectual se consistia em usar essas ferramentas para conseguir construir qualquer forma e desafio geométrico. Nesse fatídico momento, Euclides escreve seus 3 livros que formulam uma geometria que utilizava por meio de princípios axiomáticos (Que não são provados, mas, que ditam as provas de estruturas mais complexas) e seus milhares de teoremas que conseguem resolver problemas das mais variadas ideias.

Este momento trouxe um despertar para esse novo tipo de literatura, a literatura da matemática analítica, e se tornaria o pilar para a evolução da geometria até os dias atuais, com a extensão de Hilbert, por exemplo.

O livro “Os Elementos” se tornou referência de estudos até mesmo para os mais promissores matemáticos do Renascimento, como foi o caso de Pascal.

Figura 2 – Os Elementos, Livro 2, Proposição 5, Papiro de cerca de 100 d.C.

Essa influência axiomática trouxe para o mundo da matemática uma notória necessidade de estudar outros assuntos mais intrínsecos de mesmo, ou maior, rigor de pensamentos e abstrações.

1.3. O Nascimento do Renascentismo, da Impressão, das Guerras Eurocêntricas e Sobretudo da Busca pela Razão!

Após os eventos do século XV, que proporcionaram a liderança Europeia nos pés da vitoriosa França após a Guerra dos Cem Anos e após a queda final da igreja para os Otomanos, as novas rotas para chegar ao oriente trouxeram a “Era dos Descobrimentos” e acenderam a chama da revolta na igreja, trazendo o Protestantismo. Todos esses eventos foram necessários para moldar a mente do jovem René Descartes, que estudou em doutrina jesuíta. Gutenberg criara a impressão, e, portanto, a distribuição de tratados e estudos ficara ainda mais fácil de acontecer, o que influenciou diretamente nessa necessidade de liberar a luz da razão.

Nesse período onde estavam constantemente olhando no passado para conseguirem seguir em frente, e com a impressão começando a ser largamente utilizada, o interesse no estudo das curvas que a tradução dos tratados de Apollonius, Arquimedes e Pappus trouxeram, além das aplicações que Kepler havia encontrado das curvas em suas deduções dos movimentos dos astros. Além, claro, das inovações propostas por Viète na notação de equações algébricas, tal como usar Ax + B e etc.

É necessariamente no período de trégua conquistada pelo príncipe Maurício, na Holanda, que aquela região se torna interesse de Descartes, que embarca, em plena Guerra dos 80 Anos, para uma breve carreira militar no exército holandês, claro que seu objetivo não era meramente militar, mas, conseguir se desenvolver intelectualmente com essas aplicações práticas que o exército lhe proporcionavam, uma vez que diz em seu famoso livro “O Discurso do Método”, odiava o modo com que lhe ensinavam na escola, era algo muito explicativo e pouco prático.

Com um mundo europeu completamente interligado devido a expansão comercial criada graças a “Era dos Descobrimentos” e a intensa guerra política que se estendia por séculos entre os países da região anglo-saxônica e os países que lideravam as explorações lá da Península Ibérica, o mundo intelectual estava mais agitado do que nunca, ainda mais após o Calvinismo estar em completa ascensão, ou seja, era um universo de rebeldia, onde a razão era uma forte arma, e onde tratados da história antiga da humanidade, sobretudo do período da filosofia grega, começam a renascer no conhecimento contemporâneo, esse era o momento mais do que necessário para nascer em Descartes a vontade de viajar essas nações em sua “Jornada Intelectual”, um evento que tanto o trouxe uma vontade de atingir o máximo que a razão poderia fornecer, quanto lhe trouxe a vontade de provar que o pensamento humano precisava transcender, precisava usar a razão, a mesma razão que a matemática trazia, da exatidão.

Quando estava com o exército bávaro no frio inverno de 1619, ele ficava até tarde na cama pensando em problemas matemáticos, essa atividade o deixava intensamente focado. Foi nesse momento da vida dele, que ele descobriu a forma sobre poliedros: **v + f = a + 2**, onde v, f e a são o número de vértices, de faces e arestas, respectivamente. Enquanto esteve na Holanda, fez uma grande amizade, amizade esta que o deu vontade de continuar suas investigações e aplicações de sua forma única de pensar. Em 1628, ele envia para este seu amigo, uma regra para construção de raízes de qualquer equação cúbica ou quártica, usando seu incrível método de intersecção, como visto na figura 3.

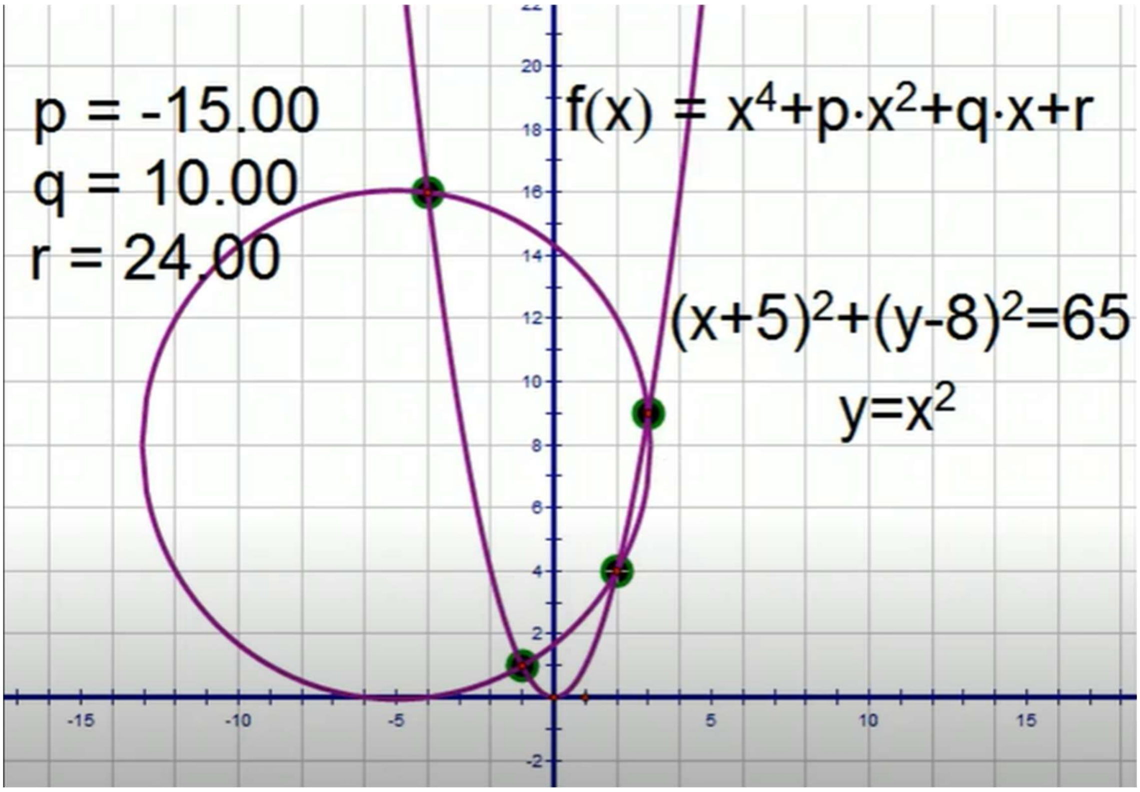

Figura 3 – Método de Descartes para Encontrar Raízes de um polinômio quártico, onde cada intersecção com o círculo é uma raiz.

Já nesse momento, percebe-se a real intenção de Descartes ao aplicar sua metodologia de reduzir problemas complexos em pontos simples. Ele estava tratando de problemas complexos e extensos da álgebra e os convertendo em "simples" problemas geométricos onde já se sabia a resposta. Esse processo marca a forma de ver esses dois universos que até então eram mais separados. Descartes ao buscar o passado Euclidiano para tratar de problemas algébricos, também estava dando a abertura necessária para conseguir tratar problemas geométricos com o uso da álgebra, da análise escrita. Nesse momento que envia a carta a seu amigo, estava praticamente pronto o sistema de coordenadas que trouxe o seu nome como base, o sistema cartesiano, uma maneira de tratar problemas geométricos em análise e vice-versa usando gráficos, provavelmente o que também trouxe o aceleramento na invenção do cálculo.

2. A Geometria Analítica

2.1. O "Discurso do Método" e "La Géométrie"

Embora muitos pensem que *"La Géométrie"* fora um livro escrito por René Descartes, na verdade, este não foi escrito com o propósito de ser um livro de René, mas, é um apêndice para seu livro "*Discours de la méthode*" (Discurso do Método), onde explica, por meio da razão e deduções, como ele havia descoberto um método onde a lógica da dedução seria o norte para resolução não somente de problemas matemáticos, mas, de qualquer problema existente. A parte da geometria fora usada apenas para provar a força de seu método, para exemplificar como ele tratava os problemas no mundo matemático e como isso era possível graças a redução de problemas complexos em problemas simples, e após resolver esses problemas simples um por um, se chegaria a resposta.

No começo das interpretações do discurso, quase ninguém fora capaz de entender qual era a relação daquele apêndice com o método, e por vezes essa parte fora separada em um livro distinto.

Como fora visto na última seção do capítulo anterior, o grande marco dessas viagens de Descartes fora o tempo que estas proporcionaram para que ele resolvesse problemas complexos da matemática, um ponto chave para conseguir amadurecer seu método. Um grande amadurecimento é visto no momento que com intersecções de círculos e parábolas, se chegava à resolução de problemas que envolviam polinômios complexos em estrutura, assim como Fermat havia proposto um ano antes (1636).

Uma frase que marca bem o que Descartes propunha com seu método na geometria é a seguinte:

"Todo problema de geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que o conhecimento de comprimentos de certos segmentos basta para a construção."

Fica, então, evidente que o objetivo é trazer problemas algébricos para resolução em forma geométrica, como ele fizera ao resolver o problema das raízes dos polinômios.

Descartes é conhecido por ter aplicado a álgebra na geometria, mas, na verdade, ele realizou a tradução da linguagem algébrica em linguagem geométrica, ou seja, assim como apresentou soluções algébricas por meio da geometria, também resolveu problemas geométricos por meio da álgebra. Coisa que estava sendo encaminhada pelos geômetras anteriores. O que inova na parte de Descartes, é o uso de notação formal extremamente precisa, provavelmente por influência dos trabalhos de Viète, que já trazia formalismo notável.

O ponto de ruptura que Descartes cria em relação ao que já havia na tradição geômetra da Grécia Antiga, foi o na forma de interpretar as equações e formas. Ao invés de ver x^2 como área de algo, ele via como segmento. De tal forma que hoje lemos x^2 como "X ao Quadrado" sem imaginar um quadrado necessariamente.

2.2. A Geometria à luz do "Método"

"A Geometria" era composto por três livros, sendo o I e II os que mais tratam diretamente o que a Geometria Cartesiana deixaria de legado para o desenvolvimento da Geometria Analítica que temos atualmente.

No Livro I, Descartes detalhadamente trazia maneiras para resolver equações quadráticas, mas não de forma algébrica, ele estava usando os métodos geométricos.

Por exemplo, para resolver $x^2 = ax + b^2$, ele usava a seguinte descrição, à luz da forma que os teoremas de Euclides faziam:

"Tracemos um segmento LM de comprimento b, e em L levante-se um segmento NL igual a a/2 e perpendicular a LM. Com centro N construímos um círculo de raio a/2 e traçamos a reta por M e N que cortará o círculo em O e P. Então x = OM é o segmento desejado. Descartes ignorava a raiz negativa, porque a considerava como "falsa". (Figura 4)

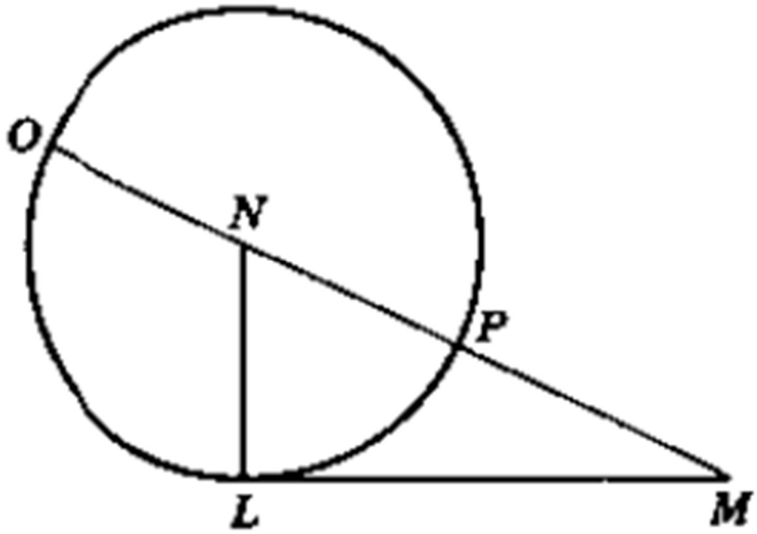

Figura 4 – Uma Resolução para uma Função Quadrática, Livro I "Le Geometrie"

Essa imagem passada pela Figura 4, é uma forma inovadora de resolver o problema, é a análise de uma função quadrática usando formulações conhecidas com a geometria. E é uma aplicação interessantíssima das curvas e retas.

Tendo aplicado, como no exemplo da Figura 4, a geometria em um problema algébrico, Descartes tenta fazer o inverso também, tentar aplicar álgebra em problemas geométricos, afinal, ele havia resolvido um caso de álgebra usando geometria simples, então, desejava poder fazer o caminho inverso. Então, descreve um método geral para aplicar a álgebra em problemas geométricos determinados:

"Se, pois, queremos resolver qualquer problema, primeiro supomos a solução efetuada, e damos nomes a todos os segmentos que parecem necessários à construção – aos que são desconhecidos e aos que são conhecidos.

Então, sem fazer distinção entre segmentos conhecidos e desconhecidos, devemos esclarecer a dificuldade, de modo que mostre mais naturalmente as relações entre esses segmentos, até conseguirmos exprimir uma mesma quantidade de dois modos. Isso constituirá uma equação (numa única incógnita) pois os temos de uma dessas expressões juntos são iguais aos termos das outra.”

Descartes, por ser extremamente metódico, fica extremamente preocupado com esse tipo de problema geométrico, onde a equação algébrica final só pode conter uma quantidade desconhecida. E o grau final dessa equação algébrica, ditará os métodos geométricos para construir essa resolução. Como ele mesmo elenca:

“Se pode ser resolvido por geometria ordinária, isto é, com uso de retas e círculos sobre uma superfície plana, quando a última equação tiver sido completamente resolvida, restará no máximo o quadrado de uma incógnita, igual ao produto de sua raiz por alguma quantidade conhecida, acrescido ou diminuído de alguma outra quantidade também conhecida.”

Essa formulação se aparenta muito com a abordagem grega de problemas do cotidiano e de exercícios mentais da época, usavam régua e compasso para chegar a resolução, e Descartes está trazendo a abordagem da álgebra em respostas que dependam somente de régua e compasso, e resolver problemas simples de régua e compasso de forma algébrica.

Na antiguidade, existiam três problemas, conhecidos como “problemas planos”. Estes eram:

- **A Duplicação do Cubo:** Dado um cubo, o quanto devo aumentar suas arestas para conseguir um cubo com o dobro do volume?
- **A Quadratura do Círculo:** Usando passos finitos e apenas compasso e régua, criar um quadrado com a mesma área que um dado círculo;
- **A Trissecção do Ângulo:** Dado um ângulo qualquer, usando régua e compasso, criar um outro ângulo com o terço da amplitude do primeiro.

Esses problemas não podiam ser resolvidos apenas com régua não graduada e compasso. Viète já havia mostrado que a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo levava a equações cúbicas. Descartes, mesmo sem usar do formalismo e precisão de Viète, já conseguia dizer que realmente não era possível resolver tais problemas com uso de régua e compasso, afinal, não eram “problemas planos” como os gregos costumam nomeá-los.

Um ponto importante que ajudou Descartes a criar tal interpretação da Geometria, e aplicar seu método nessa matéria específica, o que ajudou na estruturação da Geometria Analítica, é o seguinte: Ele achava que a álgebra era uma arte confusa e obscura, que embaraça a mente. E achava que a geometria usava demasiadamente diagramas que fatigavam a imaginação desnecessariamente. Assim, buscando simplificar mais dos dois mundos, pretende, com seu método, trazer os seguintes objetivos:

- A partir de processos algébricos, libertar a geometria de diagramas;
- Dar significados às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas.

Assim, seu método em “La Géométrie” era o de traduzir um problema geométrico em linguagem algébrica e depois, uma vez que essa álgebra fosse trabalhada e simplificada, transportar novamente o problema para o lado geométrico e finalmente resolvê-lo. Um método que usa de extrema intuição e método dedutivo.

Descartes acreditava que esse método era possível de deduzir e resolver qualquer problema geral que envolvesse o mundo. Claro que na parte matemática não era extremamente inovador, afinal, com o renascentismo, e a busca constante em se traduzir antigas escrituras, outros matemáticos antigos foram colocados em foco novamente. Como é o caso de Papus (a.C. 290 – a.C. 350), matemático da Alexandria antiga, um matemático que pouco se sabe sobre sua vida, mas, que foi importante para o desenvolvimento da geometria projetiva, que estava sendo estudada por contemporâneos ao Descartes, como é o caso de Desargues e Pascal. E, assim como Papus, Descartes também acreditava veemente que na solução geométrica de equações deviam ser usados os meios mais simples e apropriados ao grau da equação, o mais objetivo possível. Por exemplo, para equações quadráticas, como fora mostrado na Figura 4, retas e círculos bastam; para cúbicas e quárticas, como mostrado na Figura 3, secções cônicas. Nesse ponto, o método de Descartes se demonstrou de extrema validade geométrica na álgebra e vice-versa.

Com o método “calibrado”, Descartes parte para o desafio maior que o distanciou de vez dos tradicionais gregos, ele estava a fim de tratar com maior rigor os problemas envolvendo os ***Lugares Geométricos*** (É chamado de Lugar Geométrico, o conjunto de todos os pontos que satisfaça, ou que é determinado, por uma ou mais condições específicas), um termo que a atual Geometria Analítica usa e estuda com afinco. Papus é pelos seus problemas matemáticos que envolviam o uso de retas aleatoriamente colocadas e ângulos também, além de usar uma regra a ser respeitada na construção de um lugar geométrico. Por exemplo:

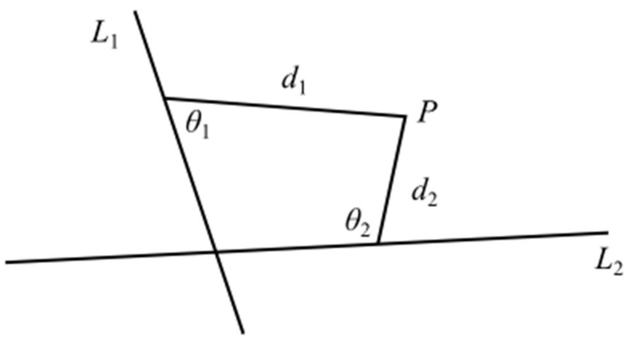

Figura 5 – Problema de 2 Linhas de Pappus.

No problema de duas linhas proposto por Pappus, o desafio é o seguinte: Dadas duas linhas L1 e L2, e duas linhas oblíquas d1 e d2 que formam ângulos θ_1 e θ_2 com as linhas L1 e L2. E possuem uma ração d1/d2 = β. Encontrar todos os pontos P que satisfaçam essa proporção β.

Para os problemas de até 4 linhas, Descartes já sabia o que fazer e era tratado como até mesmo trivial. Porém Descartes ficou mais intrigado a conseguir representar cada vez mais problemas que envolviam os conhecidos “Lugares de Pappus”. Uma dessas soluções foi inclusive mostrada por Isaac Newton tempos depois e deu o nome de “Tridente de Descartes”, algo que mostra a importância que a obra, e não só a pessoa falada, de Descartes teve na vida de Newton e na sua carreira. O tridente surge para solucionar esse problema de conjuntos de pontos:

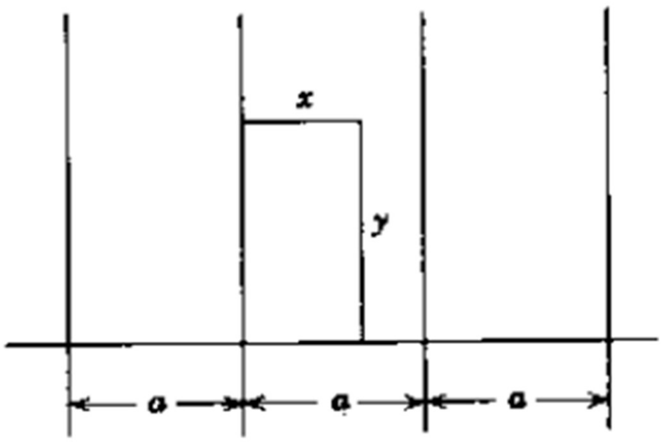

Figura 6 – Problema de Pappus de 5 linhas.

Para cinco retas, se quatro das retas são paralelas e postas á distância igual a **a** e a quinta é perpendicular às outras e se a constante de proporcionalidade no problema de Pappus é essa mesma constante **a**, então o lugar é: $(a + x)(a - x)(2a - x) = axy$, uma cúbica que Newton também divulgou, e tem a seguinte aparência:

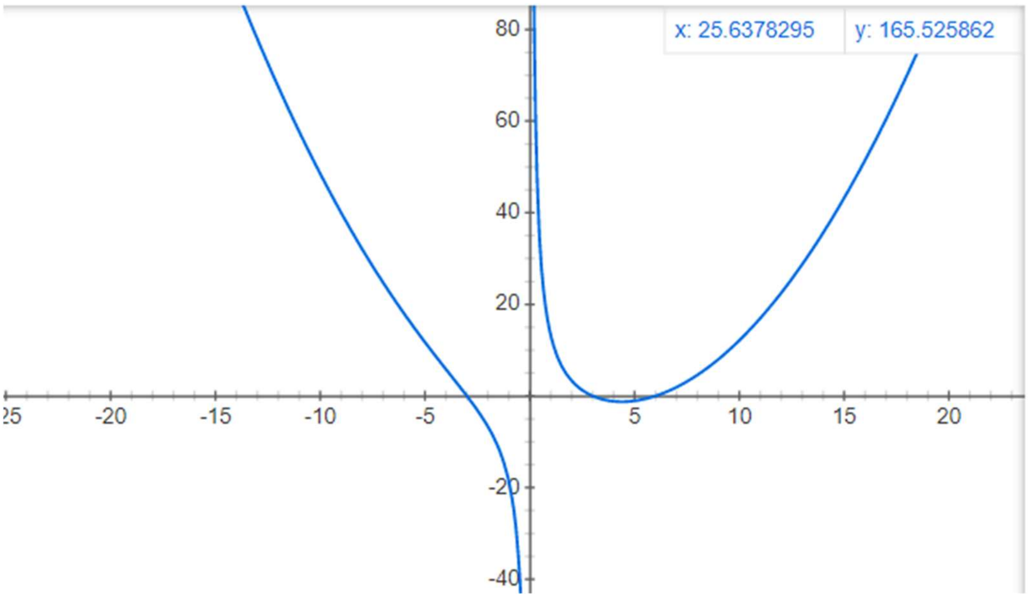

Figura 7 – Tridente de Descartes com a = 3.

Essas formas de representar novos espaços e encontrar os pontos que permeavam essas geometrias teve uma aplicação direta em geometria projetiva, mas, mostrou também que Descartes tinha um método que podia resolver até os mais difíceis problemas usando o método de sua geometria analítica. Chegando até mesmo a tentar resolver um problema geral!

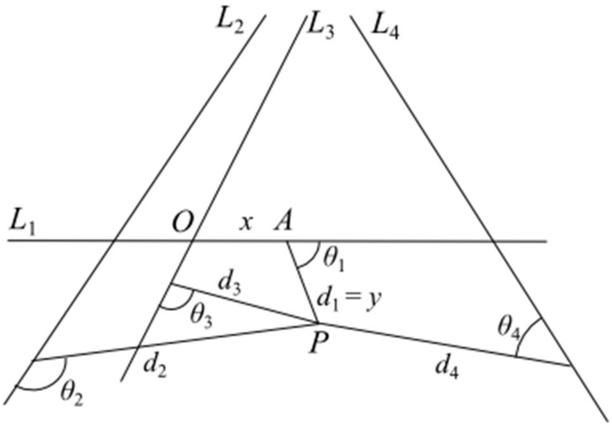

Figura 8 – Problema geral com n-linhas.

Além de se dedicar a esses problemas de projeções, Descartes também foi a fundo e começou a catalogar suas resoluções em três grupos específicos. Fazendo, assim, uma abordagem mais sistemática! É interessante notar que com as resoluções das projeções anteriores, Descartes passa a ir além dos gregos e começa a provar que, diferentemente do que os gregos achavam, era possível sim ter construções geométricas legítimas que são curvas e que não fossem retas ou círculos.

2.3. Fermat e sua Aproximação Geométrica do Cálculo

O cálculo só viria a ser formulado tempos depois de Fermat, mas, mesmo assim, muitas deduções práticas de Fermat sem o formalismo do Cálculo, revelaram sua enorme força!

Fermat faz um contra ponto com Descartes de uma forma bem menos filosófica e desafiadora, e se restringe aos estudos dos lugares mais simples, para encontrar uma forma mais abrangente do tema. Como a sua definição precisa de uma reta, como ele mesmo elenca em sua obra famosa "Ad Locus Planos et Solidos isagoge (Introdução aos lugares planos e sólidos):

"Dado qualquer número de retas fixadas num plano, o lugar de um ponto, tal que a soma de múltiplos quaisquer dos segmentos traçados a ângulos dados do ponto às retas dadas é constante, é uma reta"

Seguindo nesse mesmo objetivo de definir os lugares planos e sólidos, ele parte para a definição de que $xy = k^2$ é uma hipérbole. (Figura 9)

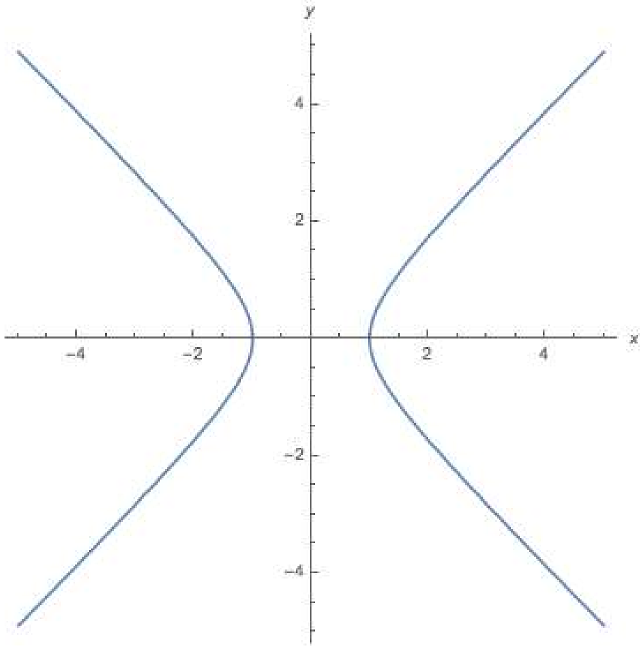

Figura 9 – Lugar Geométrico: Hipérbole

Também mostrou que a equação $x^2=y^2$ é uma semi-reta, pois operava só no primeiro quadrante.

Assim, Fermat partia de uma equação e estudava o lugar geométrico que esta o fornecia. Enquanto Descartes partia de um lugar geométrico definido e criava uma equação a partir dele. Fermat foi importante para o desenvolvimento da Geometria Analítica não por ter sido igual a Descartes e trazido um método detalhado para resolver álgebra e geometria de forma conjunta, mas, por ter trazido a investigação da geometria analítica atual, essa vontade de entender e formalizar até a menor característica de um lugar geométrico que derivasse de uma equação.

E foi num desses estudos sobre lugares que Fermat por curiosidade espontânea entra na explicação de dois temas do Cálculo por mera aproximação, esses dois problemas comuns do cálculo são: Derivadas e Integrais. O primeiro busca encontrar tangentes às curvas, e o outro busca encontrar a área abaixo de qualquer curva.

A aproximação de Fermat se deu ao estudar os lugares entregues pela equação $y = x^n$. Para curvas polinomiais de forma $y = f(x)$, ele de forma gráfica encontrou um modo inteligentíssimo para encontrar pontos de máximo e mínimo dessas funções. Ele comparou o valor de $f(x)$ e de seu vizinho $f(x + E)$, ele sabia que em uma curva próximo dos pontos e máximo e mínimo, dois valores seriam quase imperceptíveis quando muito próximos, e assim, resolveu igualá-los, e dividir por E e igualar a zero. Nesse momento ele ia aproximando até o intervalo E se tornar quase zero. Esse era o equivalente ao que temos hoje do processo de derivar e encontrar o ponto 0 da derivada. Porém, Fermat fizera isso apenas estudando a geometria, não fez utilizando de limites ou afins, afinal, não estava desenvolvido na época!

Com um método parecido ele tentou chegar na resolução do problema da tangente, e como resultado chegou muito próximo, aliás, chegou ao resultado, porém não fora reconhecido por falta de ter publicado seus resultados! Não só Fermat possuía um método para encontrar a tangente dos lugares de forma $y = x^n$, como também tinha um método para achar a área abaixo da curva! Usando pequenos pedaços retangulares bem equacionados e os tornando cada vez menores, até conseguir cobrir inteiramente a área abaixo da curva com esses pedaços! Nesse momento, há uso de integrais, porém, não do jeito formal e desenvolvido posteriormente! Porém, é o primórdio do cálculo dando seu valor!

$$a^{(p+q)/q}\left(\frac{1 - E^q}{1 - E^{p+q}}\right) = a^{(p+q)/q}\left(\frac{1 + E + E + \dots + E^{q-1}}{1 + E + E^2 + \dots + E^{p+q-1}}\right)$$

Figura 10 – Soma infinita de intervalos retangulares de área bem definida para cobrir a área abaixo de uma curva. Os primórdios da integral!

Não há muito sobre Fermat quanto se tem de Descartes, afinal, este último se tornou um destaque para a filosofia ocidente, porém, mesmo injustiçado em seu tempo, Fermat foi um dos pilares para a fundação do cálculo e é notória a forma com que a Geometria Analítica fora usada por ele, mesmo que intrinsecamente, para explicar os mais diversos problemas, até mesmo os de tangente e área embaixo de curvas!

3. Atual Situação da Geometria Analítica!

Ficou evidente a importância da análise da geometria por meio de álgebra e vice-versa durante esses dois capítulos, onde vimos que desde a antiguidade os problemas geométricos se mostraram muito mais do que simples formas expressadas em diagramas. Descartes começa a encontrar as mais profundas equações dos lugares geométricos, e Fermat traz de simples equações, incríveis lugares geométricos e inúmeras operações dentro desses lugares. Essa forma de pensar, pode ser, inclusive, o nascimento da própria Álgebra Linear!

Atualmente, após inúmeras inovações no método da Geometria Analítica, como a introdução das coordenadas polares e da análise dos Números Complexos. A Geometria Analítica tem sido base para a Física como sendo um dos primeiros passos para o entendimento da álgebra linear, e para análises no ramo da Engenharia da Computação com a matemática discreta.

Seus estudos de coordenadas são importantes para estudos da física clássica prática até os dias atuais.

Embora pareça uma matéria mais simples do que o Cálculo, esta se tornou uma base forte para que o Cálculo pudesse interpretar os problemas gráficos e de equações na maneira que eles são interpretados.

Como por exemplo, a reta tangente, aplicação mais abrangente dos estudos da reta criados na Geometria Analítica:

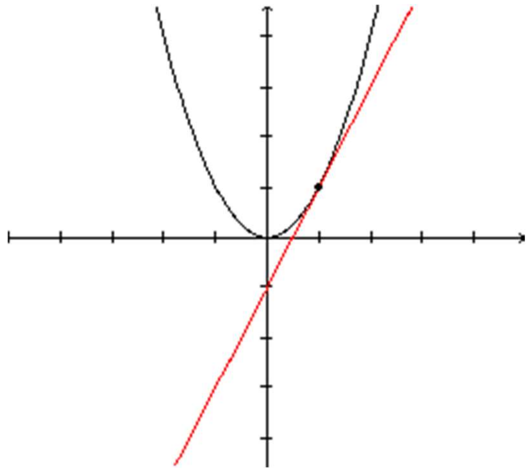

Figura 11 – Reta tangente, cujo a inclinação é encontrada a partir da derivada da função.

Ou mesmo o plano tangente, uma aplicação mais prática dos estudos de planos fornecidos pela Geometria Analítica:

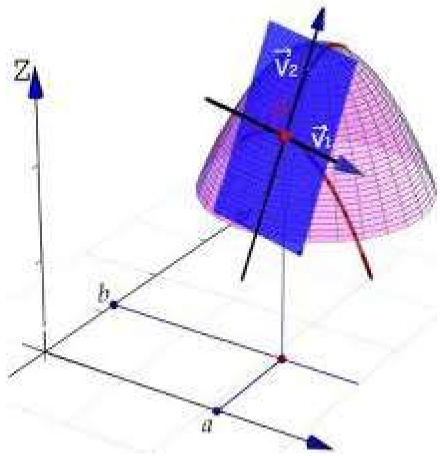

Figura 2 – Plano tangente, uma derivada para funções de duas variáveis.

3.1. Conclusão

Esse trabalho, então, me abriu os olhos para um escopo ainda maior das aplicações de uma matéria elementar de escola! Foi importante para notar que os desenvolvimentos de conceitos básicos derivados da álgebra e geometria e suas evoluções no período Renascentista em diante, criaram a base para que a ciência de Newton e seus sucessores pudesse existir. Também mostrou um pouco do bastidor por trás das descobertas, como a influência de Descartes o fez mais sucedido que Fermat ao poder divulgar seu trabalho. Trouxe uma ideia interconexão muito interessante, desde a aplicação política, como a hegemonia francesa teve influência no mundo da matemática devido ao poder que a França conquistou em suas expedições de guerra do século anterior ao de Descartes e Fermat, e como isso fora extremamente importante para o desenrolar da matemática em geral!

Referências

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. [*S. l.*: *s. n.*], 1974.

ANALYTIC GEOMETRY. Encyclopaedia Britannica, 2020. Disponível em: <https://www.britannica.com/science/mathematics/Analytic-geometry >. Acesso em: 14 de julho de 2020.

PAPPUS OF ALEXANDRIA, Wikipédia, 2020, Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus_of_Alexandria>. Acesso em: 14 de Julho de 2020.

O INÍCIO DA GEOMETRIA ANALÍTICA, Imática, 2008, Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/ganalitica.html > . Acesso em: 13 de Julho de 2020.