A história dos algarismos hindu-arábicos com o cálculo

Lucas Eduardo Todt Machado, Número USP 11820711

15 de Julho de 2020

1 Introdução

O termo ”algarismos hindu-arábicos”se refere ao sistema posicional decimal e aos glifos ao qual usamos para representar os números na atualidade. Outros nomes incluem: Algarismos indo-arábicos, algarismos arábicos ou algarismos hindus. Quando o termo é utilizado, ele é usado tanto para descrever o sistema posicional, como os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, e o termo ”algarismos arábicos”é também comumente usado para diferenciar tais algarismos de símbolos númericos de outros idiomas. O sistema e os símbolos foram desenvolvidos por matemáticos indianos, por isso assim ora recebendo o nome de hindu, e foram introduzidos na Europa por negociantes árabes, por isso assim ora recebendo o nome árabe. Quando o termo ”algarismos arábicos”é utilizado para representar apenas os glifos, eles podem também ser chamado de ”algarismos arábicos ocidentais”, para diferenciá-lo dos ”algarismos arábicos orientais”, utilizado nos países árabes junto com o alfabeto arábico. Quando o termo ”algarismos hindu-arábicos”se refere apenas ao sistema, ele pode ser associado com outros glifos ou bases, contanto que conservem as regras posicionais.

2 Contexto histórico

Atualmente, ele é utilizado em várias regiões do mundo para representar os números. Em países de língua europeia, ele é a principal forma reconhecida, enquanto em alguns outros países, ele é comumente usado junto com outros sistemas. Historicamente, o sistema foi desenvolvido na Índia ao decorrer de vários séculos, sendo que ele estava completo ao redor de 700, com uma de suas últimas formulações a criação do zero como um número, em 628, nos trabalhos do matemático indiano Brahmagputa, e aos poucos se popularizou no mundo árabe da época.

Os matemáticos Alcuarismi, que foi um dos primeiros a lidar com a álgebra e cujo nome originou a palavra “algarismo” no português, e Alquinidi, outro matemático importante da época, escreveram sobre a utilização dos números hindus, que contribuíram com a difusão do sistema no oriente médio. Na Europa, eles foram introduzidos por falantes árabes do norte da África, sendo o seu primeiro registro datando da Crônica Albeldense, de 976, uma compilação de vários documentos históricos da península ibérica. O sistema começou a se tornar popular quando Leonardo de Pisa (também conhecido como Leonardo Fibonacci, filho de Bonacci) publicou o livro Liber Abaci em 1202, promovendo o sistema.

O sistema contava com uma propriedade posicional, onde cada número era multiplicado por uma potência da base dez dependendo da posição em que se encontrava, o que diferia dos sistemas numerais mais utilizados, como o sistema romano ou grego, onde a posição do número não influenciava o resultado, e todos os números eram apenas somados para obter o número expressado. Além de ter a característica posicional, ele também apresenta o número 0, que não era utilizado nos outros sistemas, e que representava uma posição vazia. A necessidade do número zero veio para poder preencher os espaços vazios de certos números, que antes do desenvolvimento completo dos algarismos hindu-arábicos, eram escritos apenas com um espaço separando as casas.

Em sua versão mais completa, os algarismos hindu-árabes também representam casas decimais utilizando um ponto que separa as casas decimais e a unidade. O sistema com apenas 10 símbolos é possível representar qualquer número natural. Ele também é adaptável a outras bases diferentes de 10, como sistemas de base octogonal ou hexadecimal, ou seja, com apenas dois símbolos seria capaz representar qualquer número natural em um sistema de base 2 (binário), mas seria extremamente imprático (para a escrita, embora utilizado em computadores). Como a maioria das civilizações do mundo usam um sistema de base 10, incluindo os árabes e hindus quando adotaram o sistema posicional, é assim que ele geralmente é usado. Em adição aos 10 primeiros símbolos, ele pode representar qualquer número racional utilizando os seguintes símbolos extras: ponto decimal, sinal de negativo e vinculum.

3 A importância do sistema para o cálculo

Apesar do sistema ter se tornado trivial no estudo matemático da contemporaneidade, a utilização de um sistema posicional não foi um passo pequeno para o desenvolvimento da matemática. Esse desenvolvimento pode ser exemplificado pela seguinte passagem do matemático francês Pierre Simon Laplace:

> Foi a Índia que nos deu o engenhoso método de expressar todos os números por dez símbolos, cada símbolo recebendo um valor de posição, junto com um valor absoluto; uma profunda e importante ideia que aparenta tão simples para nós agora que nós ignoramos o seu verdadeiro mérito, mas a sua grande simplicidade, a grande facilidade que ela deu a todas as computações, coloca a nossa aritmética no primeiro lugar de invenções úteis, e nós devemos apreciar a grandeza dessa conquista quando nós lembramos que ela escapou dos gênios de Arquimedes e Apolônio, duas das maiores mentes produzidas pela antiguidade.

A sua importância e engenhosidade pode ser explicitada ao compará-lo com os outros sistemas que eram utilizados antes de sua implementação. Vários diferentes sistemas foram utilizados no passado, sendo que alguns deles alcançaram um nível de sofisticação considerável como o dos babilônios, mas para fins dessa análise, tomaremos apenas os sistemas românicos e gregos, sendo que o primeiro era o utilizado na Europa por vários séculos, mesmo após a queda do império romano, e o segundo foi o que os matemáticos gregos tinham como referência.

Ambos os sistemas eram sistemas numerais a base da soma, ou seja, os algarismos de um número tinham o mesmo valor onde quer que estivessem localizados, e o valor de um número era expresso pela soma dos vários símbolos que compõem o algarismo.

Os algarismos romanos, que começam a perder popularidade por volta dos séculos XI e XII, mas são comuns até hoje em certos contextos, utilizava as letras do alfabeto latino (alfabeto romano, utilizado por várias línguas europeias, incluindo o português). Os valores básicos entre 1 e 100 eram expressados usando as letras I, V, X, L e C, com valor 1, 5, 10, 50 e 100, respectivamente (sendo que essas letras poderiam ser usadas para representar valores até 400 ou 500, dependendo da notação utilizada), que combinando resultavam valores expressos por uma soma. As regras que se referem a como a relação entre cada algarismo tinha dentro de um número não foram sempre as mesmas na história e dependiam da época e das pessoas utilizando elas. Hoje em dia, adota-se um padrão que condiz com colocar os símbolos do maior para o menor da esquerda para a direita, e também existe uma notação subtrativa para determinar os números 4 e 9 e seus múltiplos da base 10.

Por exemplo, o valor três é representado como III (1+1+1), o valor quatro é representado por IV ($5 - 1$, sendo que o I a esquerda representa a subtração) e o valor 38 é representado por XXXVIII (10+10+10+5+1+1+1). Mesmo na atualidade, a regra subtrativa não é sempre seguida, e os números 4 e 9 são frequentemente substituídos por IIII (1+1+1+1) e VIIII (5+1+1+1+1).

O sistema de número gregos é de certa forma análogo aos números romanos, mas com algumas importantes distinções. Ele usava as letras do alfabeto grego para representar diferentes valores numéricos, e assim como os algarismos romanos, as regras não foram sempre as mesmas, passando por uma série de reformas, sendo que o sistema atual conta com reformas feitas por Euclides. O sistema, no entanto, associava letras diferentes para os valores de 1 a 9, os valores múltiplos de 10 entre 10 a 90, os valores múltiplos de 100 de 100 a 900 e assim por diante. O sistema precisa de 19 diferentes letras para representar os 100 primeiros números (sendo que essas letras representavam números até 200), e ele usa as 9 primeiras letras do alfabeto jônico (alfa, beta, gamma, delta, épsilon, digama, zeta, eta, teta) para representar os números de 1 a 9. As outras 9 letras (iota, capa, lambda, mi, csi, ômicron, pi, qoppa) representavam os valores múltiplos de 10 entre 10 a 90, e a letra rho representava o número 100. Assim como o sistema romano, os numerais gregos também eram aditivos, sendo que o sistema grego geralmente não tinha uma ordem necessária para a soma. Assim, o número ρμθ (utilizando o símbolo moderno para as letras) representava o número 149 (rho, mi e teta, 100+40+9).

Ambos esses sistemas tinham alguns problemas que dificultavam trabalhar com números. O primeiro grande problema que podemos destacar era a quantidade limitada de símbolos para representar uma quantidade infinita de números.

Isso não é um problema no ínicio do desenvolvimento matemático por que geralmente a matemática era usada para descrever números pequenos que apareciam nas vidas das populações. No sistema romano, conforme os números aumentavam, era preciso definir diferentes letras para atender as novas escalas. Por exemplo, os algarismos romanos começam a definir a letra D para o valor de 500 e a letra M para o valor de 1000, e os algarismos gregos definem dez novas letras para cada magnitude. No entanto, nos algarismos hindu-arábicos, era possível representar qualquer número com alguns poucos símbolos e uma quantidade de espaço que crescia gradualmente, utilizando apenas o sistema posicional. A base utilizada na época (base 10) demandava apenas 10 símbolos (nove símbolos mais o do zero) e era o suficiente para simplificar números grandes. Tal problema se desenvolvia de forma diferente para cada sistema, por exemplo, o número 987 seria representado como CMDCCLXXXVII em algarismos romanos, e como ϡπζ em numerais gregos (sampi, pi e zeta). Os números romanos utilizavam uma quantidade grande de espaço para escrever um número, mas ainda era mais eficiente que os números gregos no quesito de que apenas 7 símbolos eram necessários para contar até aquele número, enquanto 27 símbolos eram necessários nos números gregos.

Outro problema, era a forma de representar os números não inteiros. Para representar esse números hoje, ou utilizamos a notação com casas decimais, ou como uma fração. Como os sistemas não eram posicionais, eles não permitiam a representanção por casas decimais, já que não fazia sentido representar diferentes casas em um sistema não posicional, e por isso não havia sentido de representar casas decimais atráves de uma vírgula sem definir um conceito novo. A forma que existia para representar tais números não inteiros era pela ideia de proporção, que vai se demonstrar ineficaz uma vez que trabalhamos com os números chamados ”inconmesuráveis”(na linguagem atual, os números irracionais), e a própria notação fracionária desses dois sistemas eram limitados.

Junto aos números romanos, utilizava-se um sistema diferente para representar frações, que era duodecimal ao invés do sistema decimal para inteiros, sendo que a motivação para isso viria do fato de que o número 12 tem melhor divisibildade, sendo divisível pelos números 1, 3, 2, 6 e 12, enquanto o 10 era divisível pelos números 1, 5 e 10 apenas. No entanto, esse sistema tinha várias limitações, já que para cada fração era necessário um símbolo diferente, e eles tinham nomes e símbolos para cada uma das frações “elementares”, indo de 1/12, 2/12, 3/12, até 11/12, e para algumas outras frações especiais como 1/8, 1/24, e 1/1728 (12^{-3}). O sistema era assim baseado pelo fato de que elas geralmente eram utilizadas para transações com moedas, e os nomes de cada fração elementar correspondia ao nome de moedas no tempo dos romanos. Já os algarismos gregos utilizavam uma notação que correspondia apenas para frações unitárias, e eram marcados com uma “keraia” (um apóstrofo após a letra). Por exemplo, 1/5 era marcado por ε', sendo que ε representava o número 5, e existiam também números especiais para as frações 1/2 e 2/3. Esse sistema era muito parecido com o dos egípcios, que representavam frações como somas de frações unitárias (chamadas frações egípcias), e por isso, por exemplo, a fração 11/28 seria representado com o número $\delta' \ \zeta'$ (1/4+1/7).

A respeito dos algarismos romanos e gregos, que apesar de não serem os únicos sistemas númericos utilizados antes dos algarismos hindu-arábicos, todos os outros sistemas seguiam um modelo parecido, ou seja, eram baseados na soma, e mediante aos problemas desses sistemas, foram introduzidos algumas características que permitiram o entendimento, e até um certo ponto, podemos dizer que possibilitaram o desenvolvimento do cálculo, isso é, podemos pensar na hipótese de que o cálculo não viria a se desenvolver se não na luz de um sistema posicional. Tais características incluem a facilidade de expressar números de qualquer magnitude desejada, e uma nova forma de representar números, utilizando as casas decimais de um número não inteiro.

Inicialmente, os algarismos hindu-arábicos facilitam em pensar no conceito do infinito. Se pensarmos na matemática atual, é simples entender porque os números naturais são infinitos, ou porque a linha dos números naturais não tem fim. Seguindo o sistema posicional, começamos a contar até o 10. Chegando nele, repetimos a etapa, e aprendemos a contar até o 100. Depois disso, aprendemos que podemos continuar fazendo isso indeterminadamente, e eventualmente, podemos pensar na ideia de que não existe um número maior que todos. Esse conceito, no entanto, é um conceito abstrato, e para civilizações que iniciam desenvolvendo a matemática para uso no cotidiano esse conceito acaba sendo desviado, e os sistemas não posicionais de certa forma podem ter colaborado em dificultar pensar em tal conceito no âmbito numérico.

Extendendo a ideia de infinito, os algarismos hindu-arábicos também facilitaram as representações de razões. Usando as casas decimais, era possível representar proporções simples como 1/2 e 1/5 em um único número, como 0.5 e 0.2, e extendendo o conceito utilizando o vinculum, uma barra horizontal acimas dos números que indica uma repetição no infinito, podemos expressar qualquer razão entre dois números inteiros, como por exemplo, os números 1/3 e 1/7 como $0.\overline{3}$ e $0.\overline{142857}$.

Seguindo na mesma linha de raciocínio, os números hindu-arábicos possibilitaram também visualizar os número irracionais. Na antiguidade, os números irracionais eram um tópico que gerou grande dúvida. Tais números não poderiam ser representados como frações, ou seja, como uma razão entre duas grandezas inteiras, o que não fazia sentido para os matemáticos, mas apesar deles não poderem ser descritos, a sua não existência conflitaria com alguns princípios intuitivos, como por exemplo, a existência de um quadrado de área 2, que levaria a concepção de que existe um número que multiplicado por si mesmo seria igual a 2, que não podia ser, no entanto, descrito como uma relação entre dois números inteiros. As primeiras noções de uma forma de quantificar um número como a raiz de dois, vieram com a ideia de achar uma certa precisão com qual duas razões (dois números racionais) cercam o número irracional (que na época, não tinha tal conceito, e pensaríamos apenas em número incomensuráveis), tal que $A < Q < B$, sendo que os números A e B poderiam ficar cada vez mais próximos um do outro, restringindo o valor possível de Q. Essa visualização, no entanto, se simplifica com os algarismos hindu-arábicos, onde a precisão de A e B podem ser denotadas como as casas decimais, e que nessa notação, os números irracionais tem infinitas casas decimais que não se repetem em nenhum padrão.

O conceito básico de escrever casas decimais após um número possibilitou uma visualização diferentes dos números, que começa a instigar na ideia de continuidade. Conforme os números irracionais e racionais são definidos no sistema posicional, ele demonstra facilitar e unir ambos os conjuntos, de tal maneira que a visualização de uma reta numéria contínua fique muito mais simples, ou seja, a ideia de que entre dois números inteiros, podemos selecionar quantos diferentes números existentes podemos pensar, já que qualquer combinação de números após o ponto decimal pode ser pensado como um número válido, o que ajuda a visualizar que além dos números inteiros, podemos pensar nos números com casas decimais repetidas (antes conhecido apenas como razões mensuráveis), e com casas decimais infinitas sem repetição como parte de um conjunto maior, que pode representar uma linha contínua, onde podemos sempre escolher intervalos mais pequenos entre dois números de forma indefinida, o conjunto dos reais.

O fato de que os algarismos hindu-arábicos nos ajudam a representar a linha real, mesmo que não podemos afirmar que foi a razão pelo qual o conceito convergiu no desenvolvimento do cálculo e podemos apenas chegar a conclusão de que ele evidentemente ajudou o processo, podemos ao menos dizer que ele facilita o aprendizado do cálculo no mundo moderno. Uma vez estebelecido a ideia de continuidade em uma linha de números reais, podemos fazer mais sentido de alguns elementos fundamentais do cálculo. Por exemplo, a definição do limite, que diz

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in D, 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

E apesar de a sua forma mais formal ser um pouco abstrata, a forma intuitiva de visualizar é apoiada pelo sistema decimal posicional, por exemplo, podemos pensar em um números cada vez mais pertos do número a tomar o limite de um ponto, e intuitivamente visualizar com uma sequência de casas decimais aumentando gradativamente, onde aproximar x para 1 pode ser visto como uma sequência do tipo $(0.9, 0.99, 0.999...)$. Além disso, evidencia também o que já foi discutido, para pensar em um epsilon qualquer e um delta qualquer, é necessário também estipular a ideia de uma reta contínua.

Outro conceito importante que pode ser facilmente visualizado, e que é pertinente as áreas da integração e da derivação, é o conceito de infinitesimais. Esses que podem ser aliados ao conceito do limite, representam a tendência a representar algo que se aproxima de zero, mas nunca chega em tal valor. Da forma análoga ao que foi feito antes, podemos pensar um valor infinitesimal como o fim da sequência infinita que seguiria como $(0.1, 0.01, 0.001)$.

Desses diferentes conceitos, mesmo que não possa se afirmar que o cálculo foi permitido apenas por causa de como ele facilitou a unificação dos conjuntos e a visualização contínua dos números, considera-se que ele pelo menos ajudou. Historicamente, os conceitos de infinito foram sempre vistos de uma maneira negativa. Os filósofos gregos recusavam usar o conceito de infinito, e os consideravam algo a sentir aversão. Reconhecendo a complexidade na simplicade dos números hindu-arábicos, é possível entender como a ideia dos números foi simplificada de uma forma significativa, a medida de reduzir qualquer número a apenas 10 símbolos simples, permitindo extender o número ao conceito de infinito, interminável, ou sem limites, e o sistema de representação decimal que possibilita facilitar a visualização contínua dos números reais, todos esses conceitos que são fundamentais para o cálculo, e poderiam ter mudado a forma de pensar dos matemáticos do passado, e ajudam a pessoas que começam a aprender a matemática na atualidade.

4 Referências

Todos tiverão o último acesso em pelo menos 15 de Julho de 2020.
1 - Klein, Felix (2009). Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis. Cosimo, Inc. ISBN 978-1605209319 – pelo Google Books.
2 - Rowlett, Russ (2004-07-04), Roman and "Arabic"Numerals, Universidade da Carolina do Norte em Chapel Hill.
3 - Pearce, Ian (Maio de 2002). "The Bakhshali manuscript". A coleção MacTutor História da Matemática "The MacTutor History of Mathematics archive".
4 - "Hindu–Arabic Numerals". Archivado do original de 2005-12-27.