MATHEUS SOUZA PEREIRA

PROFESSOR JOÃO OSCAR ABDOUNUR

O CONCEITO DE CONTINUO E INFINITO NA IDADE MÉDIA

Como os conceitos de continuo e infinito influenciaram a matemática e sobretudo o nascimento do Cálculo na Idade Média

INSTITUTO DE FÍSICA

2020

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Poucos conceitos são mais abstratos, quanto o infinito. A vida ciência moderna está acostumada com tratamentos matemáticos mais o menos precisos do infinito, infinitésimos e dos números irracionais, mas nem sempre estes conceitos estiveram tão presentes na matemática. De fato, Cantor, que formalizou dentições de medidas infinitas diferentes de conjuntos, enfrentou no seculo 17 uma grande relutância de toda a classe matemática europeia da época, mostrando que novas ideias, as revolucionarias muitas vezes vem acompanhadas de uma negação.

Para se analisar o conceito de continuo e infinito na Idade Média, é necessário uma regressão para se analisar a filosofia na Idade Média, com uma contextualização sobre as influencias que moldaram o imaginário da época sobre esses dois conceitos tão importantes na matemática atual.

Sendo a Grécia particularmente posicionada numa região de forte contato entre Europa, Oriente Médio e Africa, a civilização grega foi extremamente influente na construção da Filosofia Medieval, e assim, os filósofos gregos tiveram um imenso impacto não só na Europa, mas no Oriente Médio também, e é preciso uma primeira analise de como estes tratavam não só o infinito, mas a matemática como um todo.

1.1 A MATEMÁTICA GREGA

O que hoje é chamado de matemática grega era na época um conjunto de dezenas de áreas que englobavam aritmética, astronomia, geometria, física etc. Ou seja, para os gregos a matemática era, na realidade a analise do mundo através dos números. Toda construção dentro da matemática era, essencialmente, fundada em bases logicas e filosóficas, ou seja, uma analise da matemática grega releva muito da visão destes sobre o próprio mundo que os rodeava.

Muitos filósofos se debruçaram diretamente nas questões de continuo e do infinito na nossa realidade, Pitágoras(570 –495 a.C) por exemplo, foi dos primeiros a considerar a matemática como um sistema logico-dedutivo, que poderia ser inteiramente construída a partir da analise do mundo. Nesta concepção,Pitágoras considerava que a matemática deveria ser harmônica, de fato, esse conceito de harmonia guiava toda a escola pitagórica, fundada por ele, ao ponto que desenvolveram uma teoria sobre a matemática reger todo cosmo e o mundo por isso é harmônico.

Na matemática Pitagórica não havia espaço para o infinito e tampouco para o conceito de continuo, pois até em tão os números eram visto com o que atualmente seria chamado de números inteiros, usados para contagem, e as proporções e razões desses não eram considerados outros números, e sim num conceito de analogia entre duas partes. De fato, ao analisar as raízes dos inteiros não quadrados, os matemáticos gregos se encontraram numa aparente crise, pois havia uma quantidade que não conseguia ser expressa em função de proporções entre números que para eles eram conhecidos. Isso mostra como os números gregos eram discretos, e havia uma relutância muito grande em pensa-los como continuo, pois não havia uma formalização para isso

Outro grande filosofo grego influente foi Aristóteles(384-322 a.C.), que se dedicou às mais diversas áreas do conhecimento, das quais, em seu conjunto de obras Physis sintetizou seus conhecimentos sobre as leis do mundo natural e como estas eram regidas pela matemática. Em seus tratados, podemos ver muito da negação, comum a época, sobre o infinito. Para ele, o infinito não poderia existir de outra forma que não em potência, assim, como Euclides havia enunciado, os números primos sempre são sucedidos por mais um, e ai está o infinito em potência. O infinito atual, na realidade material era impossível para ele. Aristóteles também define que toda causa, necessita de uma anterior a esta para se justificar, isso geraria um problema de regressão infinita, assim, é enunciado que existe uma causa primeira, da qual todas as outras podem ser derivadas. Porém, para Aristóteles, o tempo em si era infinito. De fato, este é o único uso concebível para o infinito na logica Aristotélica, pois este se encontra no passado.

Foi também Aristóteles que registrou os paradoxos de Zenão, sobre qualquer movimento poder ser decomposto em sua metade,e esta metade na metade, e assim por diante. Para Zenão, as somas infinitas das partes finitas de um movimento são infinitas, reforçando o ponto dele, que era eleático que todo movimento é uma ilusão. É interessante ver que para a escola eleática, o mundo era homogêneo e continuo, e por isso era possível dividi-lo quantas vezes forem necessárias, a noção de infinito dos gregos acabava levando à noção de infinito, e por isso, a escola eleática, posteriormente seria descreditada em função dos atomistas.

A noção de infinito aparece também no método de exaustão de Arquimedes, porém este o evita a todo custo, chegando próximo dos atuais conceitos de calculo de áreas e limite, mas sem uma melhor formalização da ideia de se fazer um procedimento quantas vezes forem necessárias para se cumprir um certo erro na aproximação, Arquimedes acaba não desenvolvendo uma teoria geral de calculo de áreas.

Ptolomeu, cria um modelo geocêntrico do mundo, concordando com as observações gregas e com as ideias vigentes,sobretudo o aristotelismo, e este modelo considera-o finito, para o qual não existe mundo além da ultima esfera das estrelas. O modelo de Ptolomeu foi o sustentado pela Igreja Católica durante toda a Idade Média.

2 OS CONCEITOS NA IDADE MÉDIA

2.1 O INFINITO NA EUROPA CATÓLICA

Muitas discussões na Idade Média sobre o infinito se focaram na questão da infinitude de Deus, da qual, muitos pontos foram levantados contra e a favor. Em muitos casos, o Deus Abraâmico foi reconhecido como o infinito real de Aristóteles, que era impossível na realidade material, assim como a manifestação de Deus em sua essência não cabe à realidade material.

Dentre muitos, Tomas de Aquino em sua Suma Teológica, usa do aristotelismo para definir Deus como Causa Primeira, estando assim condizendo com a ideia de Deus como principio de todas as coisas.Por teologia negativa, ou seja, definir o que Deus não é , Tomás de Aquino define que Deus é "não finito", usando do sentido abstrativo do conceito de infinito e também, que Deus era continuo em si mesmo, não simples, portanto, sem composição de partes.

Sendo a Igreja Católica a maior formadora de pensadores europeus, apenas posteriormente, próximo da renascença, com o enfraquecimento da igreja sob os costumes, que esses conceitos, via mundo árabe, vieram a fazer parte da matemática europeia com muito mais força, o que culminou no desenvolvimento do calculo como é conhecido hoje.

Assim, uma analise importante da matemática desse período, foge à Europa.

2.2 O INFINITO NO MUNDO ISLÂMICO

No mundo islâmico as ideias de Aristóteles acerca do infinito vigoraram por bastante tempo, mas diferente da tradição europeia, a partir das traduções para o árabe, os filósofos islâmicos desenvolviam suas próprias teorias acerca do material traduzido, sem uma necessidade de dialogar com os pensamentos do material original. Assim, inúmeros matemáticos, concordando com o infinito aristotélicos, tentaram provar e formalizar a noção do infinito potencial e real. Entre estes, Al-Kindi(801-866dc) se propôs a dar uma prova contra o infinito real. Primeiro ele estabeleceu axiomas: 1)A junção de magnitudes finitas é finita; 2) que é finito não pode ser infinito; 3)se uma magnitude é maior que outra, esta é menor que a primeira; 4) de duas magnitudes se uma é menor, a menor é menor que a maior,mas igual a pelo menos uma porção da maior; 5) Se duas magnitudes são iguais, então a dimensão entre os limites dos dois corpos são iguais; 6) o infinito é ilimitado, e o que é finito pode ser limitado; e por ultimo, 7) se uma magnitude é somada a outra igual, então esta será maior que a magnitude das duas e maior do que era originalmente. Aqui é possível ver que, embora sejam axiomas relativamente simples, a tentativa de formalização mesmo das coisas cotidianas, para então estende-las a coisas mais abstratas é uma ferramente poderosa. De fato, Al-Kindi usa esses axiomas para elaborar um paradoxo sobre o infinito : Ele pede para se imaginar um segmente de reta infinito, do qual retiramos uma parte finita dele, e discute qual será a magnitude da parte remanescente.

Primeiramente, considera que a magnitude dessa parte será finita, porém, se a magnitude é finita, então ao se devolver a parte finita, a porção total deverá ser, pelo axioma 1, finita, mas esta era originalmente infinita. Então, deve-se considerar a porção remanescente(R) infinita. Porém, se a porção finita que foi retirada ser acrescentada novamente, a porção infinita total(O) deveria ser, pelos axiomas maior que a porção retirada. Considerando que O é maior que R, então pelo axioma 3, R é menor que O, e então, pelo axioma 4, R é igual a uma porção de O. Mas se R é igual a uma porção de O, pelo axioma 5 as dimensões entre os limites deles tem que ser iguais, o que implica em R limitado, mas, pelo axioma 6 o que é infinito não é limitado, logo R não é infinito como assumimos. É possível assumir que O e R são iguais, porém não é possível que uma parte seja igual ao todo, portando, chega-se novamente em um contradição,e a parte remanescente não é nem finita e nem infinita, o que se mostra um absurdo.

A conclusão de Al-Kindi foi de, a proposta inicial ser o absurdo, e então não é possível a existência de grandezas infinitas. Sua demonstração foi usada para provar que o Universo não poderia ser infinito e nem eterno, o que era particularmente interessante para os judeus e árabes, visto que condizia com a ideia de gêneses do mundo.

Indo em outro caminho, Al-quhi foi contra o pensamento aristotélico vigente, e demonstrou Sua demonstração se baseava no método das projeções. Considerando um plano $\mathcal{P}$, com uma semi circunferência ABC, com centro D, tal que o segmento DE, com E fora do plano é perpendicular, e uma fonte de luz percorre o o arco AC. Um outro plano perpendicular a $\mathcal{P}$, o plano $\mathcal{D}$ é considerado. A fonte nos pontos A e C não permite que E possua sombra em P, pois os raios que passam por E são paralelos ao plano.Q Quando a fonte de luz caminha no arco, a produz uma superfície cônica e em determinados pontos IJ será uma hipérbole.

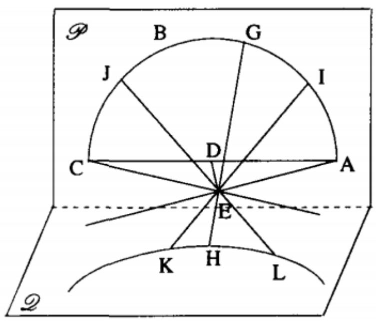

Figura 1 – Fonte:Rashed, R. Al-qūhī Vs. Aristotle: On Motion. Arabic Sciences and Philosophy 1999, 7–24 DOI: 10.1017/S0957423900002587.

O argumento de Al-quhi foi de, mostrar que essa superfície se estende infinitamente pelo plano, enquanto for possível, então em alguns instante antes dela se formar, e um instante após, nesse intervalo finito, uma superfície infinita foi formada, pois a luz para ele se propaga de maneira instantânea, mostrando que é possível uma magnitude finita gerar uma infinita.

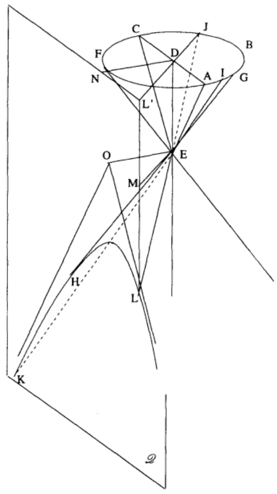

Figura 2 – Fonte:Rashed, R. Al-qūhī Vs. Aristotle: On Motion. Arabic Sciences and Philosophy 1999, 7–24 DOI: 10.1017/S0957423900002587

Muitas demonstrações, com maior ou menor rigor, foram feitas pelos filósofos islâmicos, tentando concordar ou discordar das ideias Aristotélicas ou Indianas que os influenciaram. Isso mostra que, as mais diferentes concepções do infinito, mesmo que não usadas diretamente, serviram para o desenvolvimento de um rigor dedutivo e investigativo incomum, que sempre é útil na matemática.

2.3 O INFINITO NA ÍNDIA

É na Índia Medieval que a noção de infinito encontra pela primeira vez de fato um espaço dentro da matemática,desvinculada da ideia de provar características divinas, vindo a ajudar a construção dos números enquanto um continuo. De fato, entre a Índia e o Oriente Médio havia uma troca produtiva de conhecimentos, que possibilitou os algarismos indo-arábicos e diversos trabalhos, muitos dos quais estão perdidos em parte ou em sua totalidade, e outros difíceis de precisar a autoria, restando apenas fragmentos dos manuscritos originais.

A origem da noção de infinito na Índia remonta os primórdios das religiões Hindus, Budistas e Jainistas, que possuem conceitos bem estabelecidos de infinito, sendo o mundo considerado infinito, eterno e sempre em mudança, e todos os humanos fazem parte do cosmos, reencarnando e voltando pela eternidade. Por volta do ano 300dc, o Jainismo estava se tornando uma doutrina filosófica crescente, principalmente entre os pensadores, consolidando grandes mudanças na matemática.

Os Jainistas tinham um imenso fascínio por números grandes, o que é particularmente incomum em outras culturas, onde a matemática tinha uma função cotidiana de contagem, não sendo necessário algarismos ou símbolos para quantidades acima de milhares ou dezenas de milhares. Também foram responsáveis por introduzir uma maneira muito interessante de se usar o conceito de infinito e do "nada"dentro da matemática. Para eles, os números se dividiam em 3 categorias: numeráveis(finitos), inumeráveis(grandes,mas finitos) e infinitos. E sendo que o infinito subdividido em 5 tipos: Infinito em uma direção, o infinito em duas direções,o infinito em área, o infinito em todos os lugares e o infinito perpetuo ou eterno. Aqui vemos já uma grande diferença cultural entre os Indianos e outros povos: Eles possuem um conceito de infinito não só bem definido culturalmente, mas que abrange mais de um tipo, ou seja, o infinito aqui não é algo imperfeito, impensável, como para Aristóteles, ele faz efetivamente parte da harmonia da natureza Hindu- Jaina.

Por volta do ano 300dc, um grande matemático surge dessa cultura, Aryabhata. Ele viria a influenciar fortemente a cultura hindu e árabe, principalmente por popularizar seus próprio sistema de numeração, usado na sua obra máxima, Aryabhatya. Seu sistema possui características importantes, como a posicionalidade, base 10, e possui símbolos para representar quantidades fora do cotidiano.

Vokale								
a	*i*	*u*	*ṛ*	*ḷ*	*e*	*ai*	*o*	*au*
अ	इ	उ	ऋ	ऌ	ए	ऐ	ओ	औ
1	100	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16}

Avarga-Konsonanten							
ya	*ra*	*la*	*va*	*śa*	*ṣa*	*sa*	*ha*
य	र	ल	व	श	ष	स	ह
30	40	50	60	70	80	90	100

Varga-Konsonanten				
ka	*kha*	*ga*	*gha*	*ṅa*
क	ख	ग	घ	ङ
1	2	3	4	5
ca	*cha*	*ja*	*jha*	*ña*
च	छ	ज	झ	ञ
6	7	8	9	10
ṭa	*ṭha*	*ḍa*	*ḍha*	*ṇa*
ट	ठ	ड	ढ	ण
11	12	13	14	15
ta	*tha*	*da*	*dha*	*na*
त	थ	द	ध	न
16	17	18	19	20
pa	*pha*	*ba*	*bha*	*ma*
प	फ	ब	भ	म
21	22	23	24	25

Figura 3 – Fonte:Aryabhaa numeration table Acesso em:<https://en.wikipedia.org/wiki/Alphasyllabic_numeral_systemn>

Aryabhata é creditado por ser um dos primeiros matemáticos a introduzir o "zero"na matemática, definindo como "aquilo que nada contem". Na matemática hindu o zero viria a desempenhar um papel importante,correlacionado ao conceito de infinito. Ele viria também a desenvolver um modelo heliocêntrico do universo, no qual teorizou que a luz do sol poderia ser o motivo do brilho aparente da lua e dos outros planetas. Nesse modelo, para resolução de uma equação(no sentido moderno, pois na época não havia símbolos para tal), usou um conceito de razão entre números próximos de zero, mas não zeros, sendo simular ao conceito de infinitésimo usado por Newton e Leibniz.

No seculo 6 Brahmagupta avança na questão da formalização do zero enquanto um numero, e define uma serie de operações com o zero, todas semelhantes ás atuais, mas das quais afirma que 0/0 seria 0 por uma questão de coerência com sua própria formalização de somas e subtrações, e sobre um a/0 qualquer ele não se compromete a responder por achar uma questão complexa. Brahmagupta também usa conceitos de números negativos, e uma noção de números negativos separados dos positivos pelo o zero começa a se construir, permitindo uma ideia de números como um continuo em duas direções, como o infinito dos Jainos.

Em 1150 Bhaskara II em sua obra Bijaganita, finalmente faz uma ligação entre a razão de um numero por 0 e o infinito enquanto um numero chamando estes do tipo n/0 de "khahara"e os números do tipo n*0 de zero,mas um zero especial chamado "khaguna". Para ele, estes "Khaguna"tinham que ser manipulados com cuidado, embora sejam 0 pois podem "voltar"de certa forma a serem números normais pelas regras definidas por ele: qualquer numero numerável somado a um "khahara"permanecia um "khahara", assim como qualquer numero numerável somado a um "khaguna"permanecia igual, e que um "khaguna vezes um khahara"voltaram a ser um numero numerável. É possível quer que a noção de um numero que não se mudava por operações como soma ou multiplicação era um conceito novo encontrado entre o zero e o infinito. Bhaskara II também introduz noções de "taxa"de variação de funções trigonométricas, mas sem uma abordagem que passe pelo conceito de variação infinitesimal ou infinito, razão pela qual não será mais desenvolvido aqui. Na realidade os indianos tinham uma área de calculo chamada ganita que é muito similar ao posterior conceito de calculo infinitesimal

Madhava de Sangamagrama, dois seculos após Bhaskara II, influenciado pelos seus trabalhos, desenvolve uma das maiores contribuições nesse assunto, introduzindo um conceito de series de potencia e trigonométricas infinitas, um conceito totalmente novo. Madhava chegou na ideia de series infinitas da seguinte forma: primeiramente introduz a ideia que o numero 1 poderia ser aproximado por somas de frações pares, disso desenvolveu um algoritmo de aproximação. A grande conclusão do seu trabalho, foi que, diferente do método de exaustão arquimediano, ele foi além da aproximação e concluiu que para um numero *infinito* de passos a razão seria *idêntica* a 1. Usando essa logica,concluiu que outros números poderiam ser aproximados, por series de infinitas somas. Ele notavelmente usou uma serie de aproximação para pi, 3 seculos antes de essas fossem formalizadas na europa:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{2.1}$$

Suas contribuições foram tantas que hoje em dia há series do seno e cosseno conhecidas por Series de Madhava-Leibniz, porém em português essas são creditadas apenas a Leibniz. Outra enorme contribuição, foi fundar a Escola de Kerala de Astronomia, onde suas ideias cresceram. Infelizmente, muitos dos trabalhos de Madhava foram perdidos, e muito do que é dito como feito por ele, está trabalhos posteriores da Escola De Kerala. É creditada a ele uma tabela, com valores de 24 senos, com aproximações de até 1%.

É necessário diferenciar o seno indiano do seno atual. O seno indiano, inventado seculos antes, era a corda de um arco da circunferencia, ou seja, difere do atual pelo raio, o que pode ser desconsiderado para o circulo unitário. O método usado por Madhava encontrava um angulo diferente do angulo medido, ele media a corda perpendicular ao raio, de um arco relacionado a um angulo A, e encontrava um arco com o comprimento dessa corda, e associava, pela regra do arco ser igual ao angulo que ele subscreve no circulo unitário, e a esse arco media o angulo, igual ao seno de A.

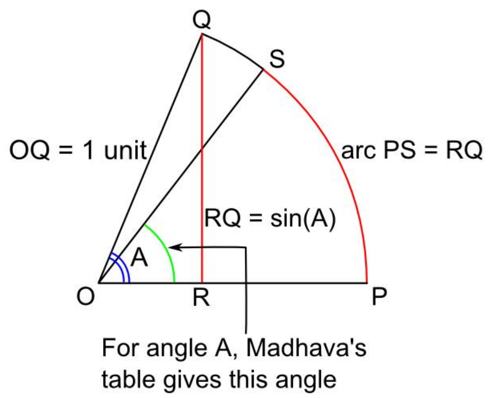

Figura 4 – Fonte : Madhava sine. Acesso em :<en.wikipedia.org/wiki/Madhava%27_sine_table>

Muito do que se sabe dos trabalhos da Escola de Kerala vem do Yuktibhaa (Grande Compêndio de Astronomia), escrito por Jyesthadeva, e consolida os resultados das gerações anteriores à ele, do próprio Madhava, Nilakantha Somayaji, Parameshvara, Achyuta Pisharat e além de resultados dele mesmo. O conhecimento de somas infinitas foi associado aos conhecimentos trigonométricos,desenvolvidos na própria escola de Kerala, assim, encontraram series com convergência rápida. Abaixo está um exemplo de como essas series foram abordadas no livro e ,uma forma matemática delas, e uma comparação com a notação moderna. Não havendo uma simbologia fácil para igualdades, somas, multiplicações e somatórios, tudo era feito em texto, muitas vezes em versos de fácil memorização em sânscrito:

"O arco é repetidamente multiplicado pelo próprio quadrado e dividido pelo quadrado de cada número par aumentado por si só e multiplicado pelo quadrado do raio. O arco e os termos obtidos devem ser colocados um abaixo do outro em ordem e o último termo subtraído do acima, o restante do termo e o próximo acima, e assim infinitamente, para produzir o [bhuja] jya do arco." Jya é o seno indiano. Sendo a o comprimento do arco e r o raio, os primeiros termos da sequência são, numa notação moderna:

$$\frac{a \cdot a^2}{(2^2+2)r^2} = \frac{a^3}{3!r^2} \tag{2.2}$$

Então, o seno indiano será:

$$jya(a) = a - \frac{a^3}{3!r^2} + \frac{a^5}{5!r^4} - \frac{a^7}{7!r^6} + \cdots \tag{2.3}$$

ou na notação atual, usando $\theta = \frac{a}{r}$:

$$sen(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \tag{2.4}$$

Inúmeras outras series trigonométricas e de potencia eram usadas em Kerala, bem como vários outros conceitos de cálculo de áreas exatas, e velocidades instantâneas, itens fundamentais para o desenvolvimento do Calculo.

3 CONCLUSÕES E TEORIAS

É possível perceber que ao longo da historia, muitas culturas se depararam com problemas matemáticos complexos, que hoje são resolvidos via Calculo, e muitas destas desenvolveram técnicas sofisticadas de como lidar com esses problemas. Além disso, as técnicas matemáticas envolvidas eram profundamente influenciadas pela propria cultura onde estavam inseridas.

Arquimedes, um dos primeiros registros do método da exaustão para calculo de áreas, chegou muito próximo do conceito de limite e de integral de Riemann atual, porém, sua negação acerca do infinito, vinda de sua cultura grega, o impediu de ter um tratamento muito formal nesse tema.

Posteriormente, com a enorme adesão ao pensamento aristotélico vindo da Igreja Católica, o infinito, bem como o conceito de continuidade, associado a este, foi neglicenciado, visto que a Igreja tinha um poder sobre todos os pensadores da época. Talvez por isso, vemos que as mais brilhantes ideias sobre o tema, vieram do Oriente.

Os Indianos, por terem um conceito muito cotidiano do infinito, ao chegarem nos mesmos problemas arquimedianos, tentaram operar com aquelas grandezas "infinitas"e definir operações, e cálculos, que é fundamentalmente, a ideia da logica matemática. Além de fundamentarem o conceito de zero, estabelecendo um ponto que separou a matemática enquanto medida do mundo, e enquanto ciência lógica.

Embora os Árabes, tivessem sido muito influenciados pelas ideias aristotélicas, vemos que eles não tinham como premissa, após traduzirem o conteúdo grego, se manter em contato com aquelas ideias, assim, desenvolviam eles mesmos muito de seu próprio conteúdo. Isso acarretou em, mesmo em concordância com uma ideia, matemáticos tentassem provar por seus próprios meios a verdade daquela ideia. O contato Árabe-Hindu também foi fundamental para que os algarismos de ambos fossem compatíveis e as trocas de conhecimento fossem produtivas, culminando em grandes maravilhas da matemática.

É difícil dizer se os conteúdos dos filósofos árabes, ou da escola de Kerala, chegaram à Europa na época do desenvolvimento do Calculo por Newton e Leibniz. Há algumas fontes que mostram que os jesuítas, para expandir a fé cristã, no seculo 14 e 15, viajaram para o Oriente Médio, Africa e Índia, e até a China, que também apresentou matemáticos que chegaram a conhecimentos de calculo, mas que por não se dedicarem ao infinito, não entraram neste trabalho. Nestas viagens os jesuítas criaram uma importante rota de conhecimentos, o que com certeza contribuiu para a cultura geral, mas não podemos afirmar que o Calculo foi influenciado diretamente.

De fato parece comum à historia, que grandes ideias surjam em diversos lugares, sob pretextos diferentes, não podendo serem creditadas a um ou outro grande pensador.

Referências

Maor,Eli. **To Infinity and Beyond-** A Cultural History of the Infinite. Princeton University Press, 1991.

Kretzmann,Norman.**The Cambridge History of Later Medieval Hilospermo:Fr om** the Rediscovery of Aristotle to the Disintegration of Scholasticism.Cambridge University Press, 1988.

Joseense,George Levergerense - **A Passaje to Infinity**_-Medieval Indian Mathematics from Kerala and Its Impact, 2009.

Roschel,Renato. **O infinito peculiar de Crescas**. Disponível em :<https://ap4082.wordpress.com/2016/02/23/hasdai-crescas/> Acesso em 05/07/2020.

Calculus & Analysis on Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics. Disponível em : <http://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/Calculus%20and%20Analysis%20Earliest%20Uses.htm> Acesso em 08/07/2020

Calculus, Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus> Acesso em: 8/07/2020

Madhava of Sangamagrama, Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Madhava_of_Sangamagrama>. Acesso em 09/07/2020.

Aryabhata, Disponível em :<https://en.wikipedia.org/wiki/Aryabhata>. Acesso em 08/07/2020.

Kerala school of astronomy and mathematics, Disponível em :<https://en.wikipedia.org/wiki/Kerala_school_of_astronomy_and_mathematics>. Acesso em 08/07/2020.

Yuktibhāṣā, Disponível em :<https://en.wikipedia.org/wiki/Yuktibhāṣā>. Acesso em 09/07/2020.

LEONE, Alexandre Goes. **Infinito, imanência e transcendência na filosofia judaica medieval**: Hasdai Crescas. 2018. Tese (Doutorado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018. doi:10.11606/T.8.2019.tde-16042019-114626. Acesso em: 2020-07-11.

Neither Newton nor Leibnitz - The Pre-History of Calculus and Celestial Mechanics in Medieval Kerala
Disponível em :<https://web.archive.org/web/20060806040307/http://www.canisius.edu/topos/rajeev.asp>. Acesso em 12/07/2020.

Rashed, R. **Al-qūhī Vs. Aristotle**: On Motion. Arabic Sciences and Philosophy 1999, 7–24 DOI: 10.1017/S0957423900002587

Kak, Subhash. **Aryabhata's Mathematics**. Disponível em :<https://www.researchgate.net/publication/45901748_Aryabhata's_Mathematics/citations>. Acesso em 12/07/2020.

Gazale, Midhat . **Number:** From Ahmes to Cantor. Princeton University Press**.** 2000.

Larvor, B.P., Löwe, B. & Schlimm, D. **History and philosophy of infinity.** Synthese 192, 2339–2344 (2015). https://doi.org/10.1007/s11229-015-0857-3

Infinito: uma historia para contar Disponível em :<http://www.ipv.pt/millenium/Millenium34/16.pdf>. Acesso em 13/07/2020.

Jon McGinnis. "**Avicennan Infinity:** A Select History of the Infinite through Avicenna" Documenti E Studi Sulla Tradizione Filosofica Medievale Vol. 21 (2010) p. 199 – 222D Disponivel em t: <http://works.bepress.com/jon-mcginnis/7/> Acesso em : 14/07/2020.