História da Trigonometria e suas Relações com o Cálculo

Nome: Fernando Teixeira Leite Camargo

Nº USP: 11810129

Turma: 2020124

Disciplina: MAT0111

Embora haja dúvida quanto ao início dessa ciência, ela surge devido à necessidade dela para o exercício da Astronomia, da Agrimensura e das Navegações pelo homem, e sua origem remete aos babilônicos e egípcios por volta dos séculos IV ou V a.C. Alguns documentos de tal época, como o Papiro Rhind, no qual há problemas envolvendo a cotangente e a tábua de secantes babilônica Plimpton 322 servem para ilustrar a ligação íntima que o início de tal disciplina matemática possui com esses povos.

Papiro Rhind

Após isso, os conhecimentos babilônicos foram transmitidos aos gregos, cuja contribuição à área se deu de forma sistemática e rigorosa. Os primeiros registros desse estudo formal remetem ao matemático grego Hiparco de Niceia.

Embora já fossem conhecidas algumas relações explicitadas geometricamente nas obras de Euclides de Alexandria, como Os Elementos, Hiparco (180 a 125 a.C.) destacou-se por ter escrito extensos tratados na forma de uma obra composta por doze livros nos quais evidenciava-se relações entre arcos e o comprimento das cordas a eles associadas, além do que estima-se que tenha sido a primeira tabela trigonométrica.

O trabalho de Hiparco de Niceia foi motivado sobretudo tendo em vista suas aplicações para seus estudos astronômicos e fez com que ficasse conhecido como o "pai da trigonometria"

Na época, o que se media não era propriamente o seno, mas sim a relação da corda de uma circunferência com seu arco correspondente. Entretanto, é possível retirar informações sobre o seno de um ângulo tendo em vista a seguinte relação:

$$\mathrm{crd}\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

Também foi de Hiparco a ideia de dividir uma circunferência em 360 partes, provavelmente retirada de Hípsicles, que dividiu a duração do dia nesse número de partes baseado na astronomia babilônica.

Outra contribuição grega importante é atribuída a Menelau de Alexandria (100 a.C). Menelau produziu seis obras sobre trigonometria esférica, tratado de nome *Sphaerica*, das quais três se preservaram na história sob a forma traduzida para o árabe. No Livro I, Menelau propõe uma base para a trigonometria esférica, análoga à base para a plana, dada por Euclides. As duas só se diferem na semelhança de triângulos e no fato da soma dos ângulos internos em um triângulo esférico ser maior do que π radianos, segundo a seguinte relação:

$$(\alpha+\beta+\gamma)=\pi+\frac{A}{R^2}$$

Na qual α, β e γ são os três ângulos internos de um triângulo esférico, A é a área desse mesmo triângulo e R o raio da esfera. No entanto, Menelau não distingue semelhança e simetria de triângulos esféricos.

No Livro II, Menelau expõe as aplicações da geometria esférica à astronomia e o Livro III contém o Teorema de Menelau: se uma transversal intercepta os lados BC, CA, AB de um triângulo ABC nos pontos L, M, N, respectivamente, então:

$$\left(\frac{AN}{NB}\right)\left(\frac{BL}{LC}\right)\left(\frac{CM}{MA}\right)=-1$$

O mesmo se estende à trigonometria esférica, mas ao invés de uma transversal há um círculo máximo transversal, levando à seguinte conclusão:

$$\left(\frac{\sin AN}{\sin NB}\right)\left(\frac{\sin BL}{\sin LC}\right)\left(\frac{\sin CM}{\sin MA}\right)=-1$$

Entretanto, a obra da antiguidade mais influente sobre o tópico da trigonometria foi a *Syntaxis Matematica*, obra composta por 13 livros escrita por Cláudio Ptolomeu (90 a 168).

Representação medieval de Cláudio Ptolomeu

Esse tratado, famoso por sua compacidade e elegância, foi chamado de "o majesto" ou "maior", e foi traduzido no árabe para Almajesto, e tem sido chamado assim desde então.

Ptolomeu, utilizando-se da mesma influência babilônica de Hiparco, também dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120. Usou $\frac{377}{120}$ como aproximação para π. Em termos de cordas, e não **senos** e **cossenos** da linguagem atual, também enuncia muitas propriedades famosas, como, além de um prenúncio de $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$:

$$\sin \alpha \pm \beta = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \pm \beta = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

Ainda havia fórmula para metade do ângulo:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

Essas fórmulas o levaram à construção de uma tabela de cordas para ângulos variando de meio em meio grau de 0° a 180°.

Até o século VIII, a astronomia passou a voltar os olhos do Almajesto para as obras do povo hindu. O primeiro aparecimento do seno se deu através das tabelas do matemático-astrônomo hindu Ariabata (476-550). Definiu o seno como a relação entre a meia-corda e a metade do ângulo e a partir dela definiu após o cosseno, o verseno e o seno inverso. Suas tabelas mostravam valores de seno e verseno (1 – cosseno) em precisão de 4 casas decimais de 0° a 90° em intervalos de 3.75°. Usou as palavras jya para seno, kojya para cosseno, ukramajya para verseno e otkram jya para seno inverso.

Tais palavras transformaram-se em seno e cosseno por traduções equivocadas. Isso aconteceu porque a palavra *jiva* em sânscrito, significa corda. E daí parte que *ardha-jiva* (meia-corda) foi abreviada para *jiva*, e então transliterada sob a forma de *jiba* pelos povos árabes. Como na língua árabe é costume escrever apenas as consoantes, ficando a cargo do leitor determinar as vogais, nas traduções europeias os autores confundiram *jiba*, palavra de origem hindu com uma de mais fácil associação: *jaib*, que significa prega, baía ou dobra de vestimenta.

Isso levou ao uso do termo em latim *sinus* para a meia-corda de um ângulo, cujo significado é seio, volta, curva ou cavidade. Foi essa tradução equivocada que levou ao termo seno, usado até os dias atuais.

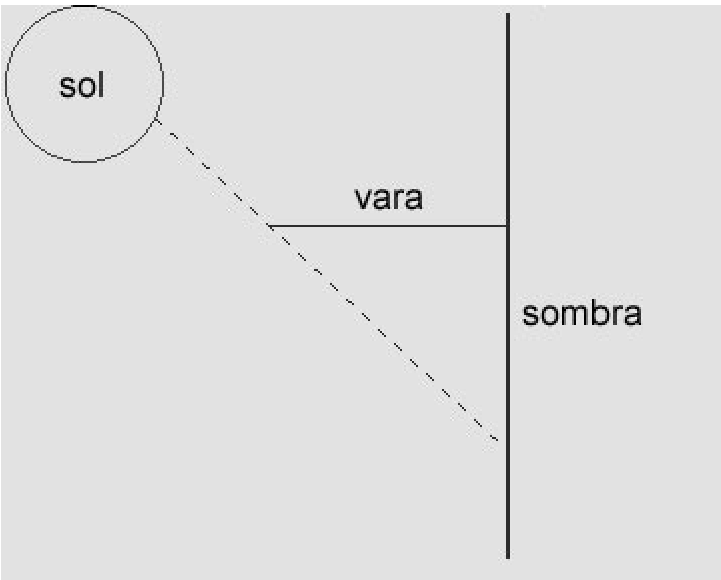
Em 1542, Rheticus publica capítulos de uma obra de Copérnico, que mostra a importância da Trigonometria para a Astronomia. Copérnico também produziu importantes tabelas para os valores de senos e cossenos, de publicação póstuma.

Antes de ser padronizado o uso da palavra seno, porém, havia muita divergência quanto ao termo apropriado. Edmund Gunter, por exemplo, foi o primeiro a utilizar a abreviação **sen** em 1624 em seus desenhos. O primeiro uso num livro se deve ao matemático francês Hérigone, em 1634. Cavalieri utilizava **Si**. Já Oughtred, **S**.

Quanto ao cosseno, Viète utilizou **sinus residuae**. Já Gunter, sugere **co-sinus**, em 1620. Cavalieri usa **Si.2**, Oughtred escolhe **s co arc** e Wallis **S**.

Viète publica as fórmulas para o seno e o cosseno do arco triplo, e também conhecia as fórmulas para $\sin nx$ em função de $\sin x$ e $\cos x$.

Uma possível explicação para o surgimento precoce da função cotangente se dá pelo fato dos egípcios antigos, apesar de não terem desenvolvido noções de ângulo, conhecerem relações entre os lados de um triângulo por semelhança e também de sombras de objetos projetados, já que uma sombra pode ser descrita pela função tangente, como ilustra a figura abaixo:



A tangente foi importante para determinar o comprimento da sombra projetada a partir do ângulo conhecido entre os raios solares e a vara, que dependia do horário do dia. Também foi importante para o desenvolvimento dos relógios solares e Tales de Mileto usou tais relações para determinar a altura das pirâmides egípcias.

As tabelas de tais comprimentos, inicialmente chamadas de tabelas de sombras, datam desde 860 com os árabes. O nome tangente só vem surgir muito mais tarde, com Thomas Fincke em 1583. O termo cotangente seria usado mais tarde por Edmund Gunter em 1620.

Quanto às notações, Cavalieri usou **Ta** para tangente e **Ta.2** para a cotangente. Oughtred usa **t arc** e **co arc**. Já Wallis utiliza **T** e **t**. O primeiro a utilizar a notação comum até os dias atuais **tan** (ou **tg**) foi Girard no ano de 1626. Em 1674 **cot** é usada por Jonas Moore para significar cotangente.

Já as funções secante e cossecante têm início motivado por razões distintas das usuais, isto é, ligado às navegações do século XV e não ao exercício das ciências astronômicas ou agrárias. Copérnico chamava a secante de hipotenusa e Viète possuía ciência das relações:

$\frac{\csc\theta}{\sec\theta} = \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ e $\frac{1}{\csc\theta} = \frac{\cos\theta}{\cot\theta} = \sin\theta$

Ao abreviar essas funções, Cavalieri utilizou **Se** e **Se.2**. Oughtred usou **se arc** e **sec co arc**. As abreviações **s** e **σ** foram as usadas por Wallis. Enquanto Albert Girard utilizou **sec**, como é costume escrever até hoje.

No século XVIII, foram descobertas interessantes relações para a função trigonométrica de uma variável complexa. Em 1702 o matemático Johann Bernoulli descobriu uma relação entre $\sin^{-1} z$ e $\log z$. Há a publicação do teorema de De Moivre $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$ e o matemático suíço Leonhard Euler fornece a fórmula $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ de onde vem a equação chamada a "mais bela" da matemática:

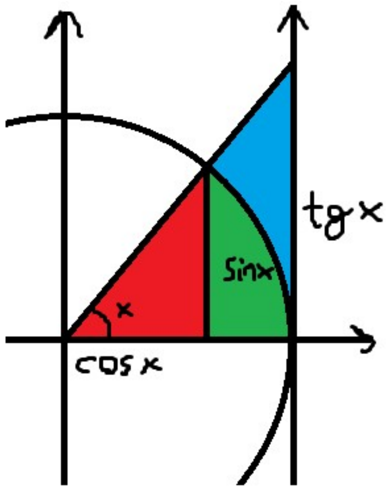
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Relação com o Cálculo

É importante, do ponto de vista do cálculo, notar que de diversas relações descobertas com tais ferramentas podem prover outras, e então, partindo do conhecimento dos limites fundamentais, assim como da demonstração da derivada das funções exponenciais pode ser obtida a derivada das funções logarítmicas, a partir das derivações das funções trigonométricas usuais pode-se obter as trigonométricas inversas. De fato, utilizando-se regra da cadeia e outras regras de derivação, pode-se obter todas as fórmulas diferenciais para as funções trigonométricas a partir da do seno.

Demonstração do Limite Fundamental:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$



Para essa demonstração, verificamos no ciclo trigonométrico acima que a área do setor circular correspondente ao arco x é simultaneamente maior que a área do triângulo vermelho e menor do que a área do triângulo que se obtém quando juntamos o setor circular com a área em azul. Matematicamente:

$$\frac{\cos x \sin x}{2} < \frac{x}{2\pi} \pi . 1^2 < \frac{1. \tan x}{2}$$

Simplificando o termo do meio e multiplicando todos os membros por 2, obtemos:

$$\cos x \sin x < x < \tan x$$

Tendo em vista que trabalhamos com ângulos positivos, ao dividir todos os membros por $\sin x$, fica-se com:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo os três membros, a desigualdade abaixo se verifica:

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{\sin x}{x} < \cos x$$

Segundo o Teorema do Confronto, devemos haver:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}(\cos x) = 1$$

Portanto:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Demonstração da derivada da função seno:

Segundo a própria definição de derivada:

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\right) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}\right) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin x\,(\cos\Delta x-1)+\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}\right) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \sin x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \sin x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\,\frac{\cos\Delta x+1}{\cos\Delta x+1}\right)+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \sin x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\cos^2\Delta x-1}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}\right)+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \sin x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1-\sin^2\Delta x-1}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}\right)+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \sin x\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{\sin\Delta x}{\cos\Delta x+1}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \sin x\,.\,0\,.\,1+\cos x\,.\,1 \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

Derivada da função cosseno:

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-\sin^2 x}\right]$$

Aplicando a regra da cadeia duas vezes, obtemos:

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}\ (-2)\sin x\ \frac{d}{dx}[\sin x]\ \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} = -\sin x$$

Logo:

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

Derivada da função tangente:

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[\sin x]\cos x - \sin x \frac{d}{dx}[\cos x]}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$$

Derivada da função secante:

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos x}\right] = \frac{d}{dx}[(\cos x)^{-1}]$$

Aplicando a regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = -\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x) = \frac{1}{\cos x}\ .\ \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$$

Derivada da função cossecante:

$$\frac{d}{dx}[\csc x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sin x}\right] = \frac{d}{dx}[(\sin x)^{-1}]$$

Aplicando a regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\frac{1}{\sin^2 x}\ \cos x = -\frac{1}{\sin x}\ \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

Derivada da função cotangente:

$$\frac{d}{dx}[\cot x] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[\cos x]\sin x - \cos x \frac{d}{dx}[\sin x]}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}[\cot x] = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$

Funções Trigonométricas Inversas:

Arco do seno:

$$y = \sin^{-1} x$$

$$x = \sin(\sin^{-1} x)$$

Derivando ambos os membros da igualdade acima e aplicando a regra da cadeia, obtemos:

$$1 = \cos(\sin^{-1} x)\frac{d}{dx}[\sin^{-1} x]$$

$$\frac{d}{dx}[\sin^{-1} x] = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\sin^{-1} x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Arco do cosseno:

$$y = \cos^{-1} x$$

$$x = \cos(\cos^{-1} x)$$

$$1 = -\sin(\cos^{-1} x)\frac{d}{dx}[\cos^{-1} x]$$

$$\frac{d}{dx}[\cos^{-1} x] = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\cos^{-1} x] = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Arco da tangente:

$$y = \tan^{-1} x$$

$$x = \tan(\tan^{-1} x)$$

$$1 = \sec^2(\tan^{-1} x)\frac{d}{dx}[\tan^{-1} x]$$

$$\frac{d}{dx}[\tan^{-1} x] = \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{\tan^2(\tan^{-1} x) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{d}{dx}[\tan^{-1} x] = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Arco da secante:

$$y = \sec^{-1} x$$

$$x = \sec(\sec^{-1} x)$$

$$1 = \sec(\sec^{-1} x)\tan(\sec^{-1} x)\frac{d}{dx}[\sec^{-1} x]$$

$$\frac{d}{dx}[\sec^{-1} x] = \frac{1}{\sec(\sec^{-1} x)\tan(\sec^{-1} x)}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec^{-1} x] = \frac{1}{\sec(\sec^{-1} x)\sqrt{\sec^2(\sec^{-1} x) - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec^{-1} x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Arco da cossecante:

$$y = \csc^{-1} x$$

$$x = \csc(\csc^{-1} x)$$

$$1 = -\csc(\csc^{-1} x)\cot(\csc^{-1} x)\frac{d}{dx}[\csc^{-1} x]$$

$$\frac{d}{dx}[\csc^{-1} x] = -\frac{1}{\csc(\csc^{-1} x)\cot(\csc^{-1} x)}$$

$$\frac{d}{dx}[\csc^{-1} x] = -\frac{1}{\csc(\csc^{-1} x)\sqrt{\csc^2(\csc^{-1} x) - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\csc^{-1} x] = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Arco da cotangente:

$$y = \cot^{-1} x$$

$$x = \cot(\cot^{-1} x)$$

$$1 = -\csc^2(\cot^{-1} x)\frac{d}{dx}[\cot^{-1} x]$$

$$\frac{d}{dx}[\cot^{-1} x] = -\frac{1}{\csc^2(\cot^{-1} x)}$$

$$\frac{d}{dx}[\cot^{-1} x] = -\frac{1}{1 + \cot^2(\cot^{-1} x)}$$

$$\frac{d}{dx}[\cot^{-1} x] = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Um ponto interessante a se notar é que a derivada de uma função trigonométrica sempre resultará em outra trigonométrica. Uma consequência disso é que a taxa de variação de qualquer função oscilatória ou senoidal também varia periodicamente, oscilando sobre um ponto em comum, ou seja, também será da forma senoidal. Assim, do mesmo modo que na derivada da função exponencial com a constante de Euler como base, não há limites para a derivação de uma função seno. Ela irá alternar na derivada primeira para função cosseno, e na derivada segunda para o oposto da função seno. A derivada terceira será o oposto da função cosseno e na derivada quarta obtemos novamente a função seno, e assim por diante quantas vezes quisermos.

Dentre as diversas aplicações há a dos movimentos harmônicos em Física, sempre que nos interessa estudar os movimentos periódicos, ou seja, se a variação da posição com o tempo por exemplo de um pêndulo ou mola pode ser modelada adequadamente com uma função da forma senoidal, a derivada primeira nos fornecerá a velocidade e a segunda a aceleração. Disso podemos estender para movimentos harmônicos mais complexos, por exemplo o da variação das marés com os ventos e o campo gravitacional exercido pela Lua, além de aplicações em medicina ao estudar pressões diastólicas e sistólicas de um coração que bombeia o sangue com alguma periodicidade.

Além disso, se o uso da reta real foi essencial à descoberta do Cálculo, houve a necessidade de se superar o pressuposto da comensurabilidade dos lados de um triângulo por parte dos gregos antigos para o pleno desenvolvimento da trigonometria, e, por conseguinte, do Cálculo em si. Afinal, a etimologia da palavra trigonometria já pressupõe o estudo das partes de um triângulo, e o uso de números irracionais como raízes quadradas de números primos e a própria constante π é essencial a essa ciência.

Entretanto, é difícil estimar apuradamente, com base apenas na plausibilidade de um raciocínio, o que teria ocorrido de diferente caso diferentes povos da antiguidade, como os babilônicos, egípcios e gregos ou da idade média como os árabes e hindus já houvessem ciência do método empregado pelo cálculo diferencial e integral moderno de Leibniz e Newton. Todavia, é importante ressaltar que, mesmo desconhecendo o método moderno, já eram utilizadas técnicas de fácil associação com o Cálculo moderno, como por exemplo o método da exaustão de Arquimedes, ou as séries convergentes e algoritmos criados pelos hindus para que fossem determinados valores para as funções trigonométricas ou para a constante π através de somas infinitas de parcelas cada qual tendendo a valores desprezíveis. Coisa que, com o conhecimento atual do cálculo integral, significaria muito tempo e esforço poupados por parte dos matemáticos da época.

Nessa época o raciocínio infinitesimal teria de ser desenvolvido pelos gregos, entretanto, e consequentemente os paradoxos de Zenão não fariam mais sentido dada a mudança do sistema de pensamento no qual eles são baseados.

Mesmo assim, sabendo que os egípcios puderam construir pirâmides com razoável precisão conhecendo apenas uma casa para π, e valores para as tangentes, ou sombras, eram conhecidos por eles apesar de não haverem como no caso dos gregos métodos de cálculos diretos para ângulos e arcos de um círculo, talvez compreendendo que para arcos extremamente pequenos sua diferença com as respectivas cordas poderia ser desprezada isso facilitaria algumas aplicações práticas da matemática. Sabendo também da operação do limite de funções, o método de exaustão de Arquimedes se reduziria a uma proposição simples: se fosse dividido o perímetro de um polígono regular inscrito em um círculo cujo número de lados tendesse ao infinito pelo diâmetro do mesmo, valores cada vez mais precisos para π poderiam ser obtidos, e não haveria qualquer distinção entre os lados do polígono e os ângulos correspondentes se estes fossem pequenos o suficiente.

Referências Bibliográficas:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B3ria_da_trigonometria

http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm

http://www.matematica.br/historia/trigonometria.html

http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm

https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_esf%C3%A9rico