Números transcendentes

suas implicações no cálculo

Lucas Roda Ximenes dos Santos

Entrega: 15 de Julho de 2020

Resumo

O texto visa apresentar como os números transcendentes podem se relacionar ao cálculo e como são relevantes no desenvolvimento dessa área. Os números a serem estudados serão o π, o número de Euler e e os números de Liouville.

Introdução

O conjunto dos números transcendentes é aquele cujos valores que o compõe são não enumeráveis[1] e também não algébricos, ou seja, são números que não são soluções de qualquer equação polinomial de coeficientes pertencentes à $\mathbb{Z}$. Segundo Euler, os números são chamados transcendentais pois transcendem o poder das operações matemáticas. Exemplos desses números que serão mostrados são: O número π, o número de Euler e e os números de Liouville.[2] Este que exibiu os primeiros números dessa classe que é tida como infinita, visto que a maioria dos números reais são transcendentes. É interessante notar que o conceito de transcendência foi proposto antes da formulação dos números que são denominados dessa forma, pois o conceito de *enumerabilidade* foi proposto por George Ludwig Cantor que nasceu em 1845 e os primeiros números propostos por Liouville foram apresentados em 1844.

No fato de que quase todo número real é transcendente, caímos em um problema muito complexo no âmbito da matemática, pois confirmar a transcendência de um número é muito complexa. Um exemplo que vem de forma automática são os números $e + \pi$ e $e \cdot \pi$, pois ambos são compostos por números transcendentes, mas mesmo assim ainda são problemas em aberto sobre suas possíveis transcendências, no entanto um deles (ou ambos) é transcendente, pois e e π são raízes da equação:

$$x^2 - (e + \pi)x + e \cdot \pi = 0 \qquad (1)$$

Veremos que os números de Liouville terão uma demonstração de que são sim transcendentes, pois eles foram imaginados e construídos para terem essa característica que foi imaginada e apresentada por Joseph Liouville em maio de 1844. Ele desenvolveu uma propriedade que era satisfeita por todos os números algébricos, portanto, se algum número não satisfizesse essa condição, ele adquiriria um caráter transcendental, desenvolvendo assim os chamados números de Liouville.

[1] Um conjunto é denominado enumerável quando a medida do números de elementos do conjunto é igual à do conjunto $\mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais).

[2] Apesar de ser apresentado nesse trabalho apenas estes números, existem muito mais a serem estudados.

1 O número π

Antes de estudarmos o π como um número transcendente, analisemos inicialmente como surge esse número tão importante. Suponhamos uma circunferência qualquer de raio R, agora tentemos calcular o comprimento dessa circunferência de maneira precisa. Para isso inscreva um polígono regular de n lados e lado ℓ tangenciando totalmente a circunferência como na Figura 1:

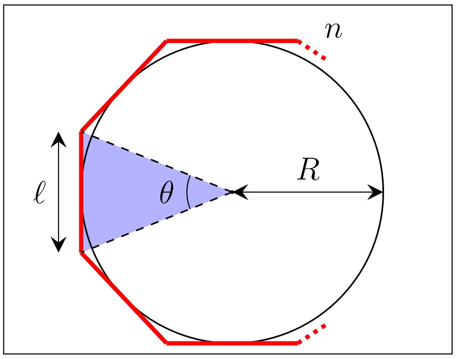

Figura 1: *Circunferência inscrita em um polígono de n lados.*

Com essa representação temos $n-1$ triângulos de base ℓ, altura R e ângulo θ, portanto, pela lei dos cossenos obtemos:

$$\ell^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\theta$$

$$\ell = \sqrt{2R^2(1-\cos\theta)}$$

$$\ell = R\sqrt{2-2\cos\theta}$$

Como o ângulo θ é expresso como o ângulo total da circunferência dividido pelo número de lados do polígono, temos que:

$$\ell = R\sqrt{2-2\cos\left(\frac{360}{n}\right)}$$

Portanto o perímetro do polígono de lado ℓ é:

$$P = nR\sqrt{2-2\cos\left(\frac{360}{n}\right)}$$

Com essa expressão, podemos modelar o que Arquimedes no século III a.C. modelou para obtermos o valor da constante π. Ele propôs que o π fosse o comprimento da circunferência dividido pelo seu raio, portanto, quanto mais lados tivesse um polígono circunscrito nele, mais próximo do valor da constante chegaríamos, portanto, teríamos que π poderia ser modelado como:

$$\pi = \frac{1}{2R}\left[nR\sqrt{2-2\cos\left(\frac{360}{n}\right)}\right]$$

$$\pi = \frac{n}{2}\sqrt{2-2\cos\left(\frac{360}{n}\right)}$$

Dessa forma, para valores cada vez maiores de n, temos uma aproximação cada vez melhor de quantos graus equivale π. Porém esse método não é dos melhores, pois só mostra uma aproximação para $\pi \approx 180°$, no entanto, não obtemos um valor em radianos, que seria mais convencional e é o mais utilizado. Para isso, houveram diversos métodos para encontrar com maior precisão o número que a relaciona o comprimento da circunferência e o seu diâmetro (duas vezes o raio). No início dos cálculos para se determinar o número π, o maior número de casas decimais até o século XV desse número foi obtido por Ghiyath al-Kashi, obtendo o valor $3,1415926535897932$.

Após uma breve história de como o π surgiu, temos de analisar a seguintes questões:

a) Porque π é considerado um número transcendente?
b) Como esse número pode ajudar no desenvolvimento do cálculo?

Para responder a primeira questão vamos considerar inicialmente os seguintes resultados sem muito aprofundamento, visto que é algo que vai muito além de um curso de cálculo I. No ano de 1873, Charles Hermite provou a transcendência do número e que estudaremos no próximo capítulo, portanto temos que:

$$a \cdot e^r + b \cdot e^s + c \cdot e^t + ... = 0 \qquad (2)$$

Não pode ser satisfeita se as potências r, s, t, ... forem números pertencentes à $\mathbb{N}$ e os coeficientes a, b, c, ... pertencerem à $\mathbb{Q}$ e serem diferentes de zero.
Em 1882 Ferdinand Lindemann estendeu o resultado obtido por Hermite concluindo que: se r, s, t, ... são número algébricos[3] e a, b, c, ... também forem algébricos, em que pelo menos um deles não é zero, então a relação (2) nunca é igual à zero.
Pela identidade de Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad (3)$$

temos uma expressão da forma (2) em que as constantes $a = b = 1$ (algébricos) e todos os outros coeficientes são zero. Portanto podemos escrever:

$$e^{i\pi} + 1 = 1 \cdot e^r + 1 \cdot e^s$$
$$\therefore r = i\pi$$
$$\therefore s = 0$$

Como zero é algébrico e o número i também é, e o valor $i\pi$ tem de ser transcendente para valer a relação, concluímos portanto que π é transcendente. ■

Agora para responder à segunda pergunta, devemos nos sustentar em alguns conceitos que à luz do cálculo são essenciais: Séries infinitas, integrais e limites.
O número π vem sendo estudado desde a antiguidade pelos egípcios e babilônios, e até hoje é motivo de estudos para os matemáticos, pois com esse número, há o desenvolvimento de séries que convergem cada vez mais rápido ao valor esperado com o maior número de casas decimais possível que promove um desenvolvimento de modelos matemáticos cada vez melhores para realizar cálculos numéricos extensos. Um exemplo de aplicabilidade dessas séries são o desenvolvimento de algorítimos para calculadoras. Exemplo de série que converge rapidamente ao valor de π é a desenvolvida por Srinivasa Ramanujan (4):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 (396^{4k})} \qquad (4)$$

Outra aplicabilidade do π é seu uso para o cálculo de volumes, um exemplo simples é o volume de um cilindro cuja base possui raio R e possui altura h, desse modo dizemos que o volume do cilindro é:

$$V = \pi R^2 h \qquad (5)$$

No entanto, não é só em volumes simples que π aparece. Um bom exemplo seria o cálculo do volume de um sólido de revolução de uma função. Conforme o capítulo 13 da 6° edição do livro "Um curso de cálculo - H. Guidorizzi", podemos escrever que o volume de um sólido de revolução de uma função $y = f(x)$ qualquer é:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad (6)$$

De maneira análoga, o volume de um sólido qualquer cuja área é definida por $A(x) = \pi[f(x)]^2$ é dado por

$$V = \int_a^b A(x) dx \qquad (7)$$

Essas relações ajudam no desenvolvimento de objetos cujo formato não é simples, mas cujo volume necessita de ser calculado com certa precisão.
Outro caso que o π se relaciona com o cálculo é saber se esse número é um *número normal*, ou seja, um número real cujos algarismos que o formam aparecem com a mesma frequência na sua expansão infinta, dessa forma um número é normal se e somente se:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(s, n)}{n} = \frac{1}{b^k} s \qquad (8)$$

onde b é uma base de numeração do número (por exemplo a base decimal), s é a sequência de algarismos do número estudado moldada na base

[3] Qualquer número que pertença aos conjuntos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ que é solução de uma equação polinomial de coeficientes inteiros.

b, $N(n,s)$ a frequência com que a sequência s aparece nos primeiros n algarismos e k o comprimento dessas aparições. No caso do π[4], temos na tabela que para os primeiros $5 \cdot 10^{10}$ algarismos na distribuição de [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9] no resultado de $(\pi - 3)$ é:

Números	$5 \cdot 10^{10}$
0	5 000 012 647
1	4 999 986 263
2	5 000 020 237
3	4 999 914 405
4	5 000 023 598
5	4 999 991 499
6	4 999 928 368
7	5 000 014 860
8	5 000 117 637
9	4 999 990 486

Figura 2: *Tabela que na esquerda representa o número e na direita representa a quantidade de aparições que esse número tem na expansão de* $(\pi - 3)$.

Um caso curioso onde π aparece é no campo probabilístico no qual os cientistas assumem com certa constância que o erro observacional assume uma distribuição normal, ou seja, segue a forma de uma função Gaussiana do tipo:

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}} \tag{9}$$

A princípio é uma função qualquer, no entanto, quando calculamos a área abaixo desse gráfico no intervalo $]-\infty, \infty[$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}} = ac\sqrt{2\pi} \tag{10}$$

o número π aparece. De maneira mais simplificada ainda, a área abaixo do gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$

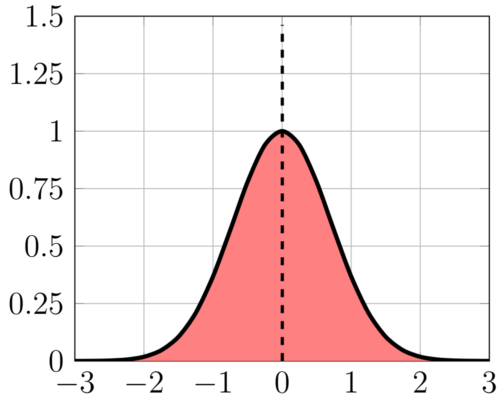

Figura 3: *Gráfico de* $f(x) = e^{-x^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{11}$$

Essa integral define a densidade de probabilidade de um evento modelado por esse tipo de função.

Esses resultados revelam que o número π aparece em diversos casos que tem relação com o cálculo, visto que os exemplos mostrados são uma pequena parcela de onde esse valor pode aparecer. Outros desses assuntos são:

- Métodos de Monte Carlo (ligado à limites).
- Algorítimos de Spigot (ligado à séries infinitas).
- Transformada de Fourier (ligado à integrais).
- Topologia na fórmula de Gauss-Bonnet (ligados à integrais).
- Integrais de Cauchy.
- Séries de Fourier (ligado à integrais).

Uma aproximação para π é:

$$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399\ 582\ 097\ 494\ 459\ 230\ 781\ 640\ \ldots$$

[4]Sobre a normalidade de π ainda é um problema em aberto na matemática, portanto, o descobrimento de métodos que deem mais algarismos corretos desse número são fatores para a resolução desse problema.

2 O número e

De forma totalmente diferente do número π, o número e, ou mais conhecido como "número de Euler", não tem uma origem simples e antiga. Os primeiros relatos do aparecimento desse número segundo Maor (1994, p.16) foi no ano de 1618, na segunda edição da tradução da obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de John Napier[5]. Segundo Maor, o número e aparece ligado à fórmula do juros composto:

$$C_t = C_0(1+r)^t \tag{12}$$

Em matemática financeira, é possível encontrar todos os tipos de composição de juros, ou seja, anual, semestral, trimestral e assim por diante, dessa forma podemos realizar o seguinte: suponha que uma composição dessas mencionadas seja feita n vezes durante o ano. Dessa forma, para cada período de conversão, usa-se a taxa de juros anuais r dividida pelo número de composições, ou seja, dividida por n. Consequentemente, como em t anos existem $n \cdot t$ períodos de conversão, obtemos:

$$C_t = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \tag{13}$$

Para estudar a equação (13), foi utilizado valores afim de simplificar a situação, tal que $r = 1$, $C_0 = R\$\ 1$ e $t = 1$ ano, ou seja:

$$C_1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \tag{14}$$

A partir da equação (14), foi estudado o que aconteceria conforme n aumentasse arbitrariamente e foi descoberto que essa sequência tenderia a um que mais a frente seria conhecido como "Número de Euler".

Na época em que Napier, o cálculo ainda estava sendo desenvolvido por Newton e Leibniz e não se tinha uma ideia formal do que aconteceria com a expressão (14) quando n "tendesse"a infinito, ou seja, não havia uma conexão concisa entre o que seria um $\lim\limits_{x\to\infty}$ (limite de x tendendo a infinito) e um $\ln(x)$ (logaritmo natural).

Portanto, após o desenvolvimento do cálculo e o seu maior uso durante a época, o número e passou a ser chamado de número de Euler e escrito também como e, pois em um de seus textos, Euler utilizou a letra e para representar a base de um logaritmo natural e por ser um dos matemáticos mais importantes da história, a simbologia se manteve. O número foi finalmente definido formalmente através de Euler quando definiu a função exponencial e a função logarítmica em uma mesma base dada por:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \tag{15}$$

$$\ln(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right) \tag{16}$$

Dessa forma, podemos tirar uma primeira relação do número e com o cálculo: sua definição formal foi apenas desenvolvida através do conceito de limites, conceito básico de cálculo. No entanto esse número possui muito mais relações com esse conteúdo do que apenas sua definição. Portanto vamos de maneira análoga ao feito com o número π responder as seguintes perguntas:

(a) Porque e é considerado um número transcendente?
(b) Como esse número se relaciona com o cálculo?

Para responder a primeira pergunta, utilizaremos o *Teorema de Lindemann*: Se $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_n$ são números algébricos (rever nota de rodapé 3 e início da introdução) distintos, então $e^{\alpha_1},\ e^{\alpha_2},\dots,\ \alpha^{\alpha_n}$ são linearmente in-

[5]John Napier (1550-1617) foi um matemático escocês que ficou conhecido como o criador e desenvolvedor do logaritmo natural (ou logaritmo neperiano), onde foi responsável pela primeira referência notável no número e (apesar de não saber de sua existência provada).

dependentes sobre $\mathbb{Q}$. A partir desse teorema podemos concluir de imediato que se tomarmos $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq 0$, temos que e^{α} não é um número algébrico, logo e é transcendente. ■

Embora pareça um resultado que aparece sem mais aprofundamento, a ideia da prova de que e é transcendente consiste em supor por absurdo que os valores e^{α_1}, $e^{\alpha_2}, \dots,$ α^{α_n} possuam uma dependência linear e para isso é necessário construir uma equação algébrica que relaciona uma soma de números inteiros que não é divisível por nenhum número primo suficientemente grande, dessa forma não sendo um inteiro nulo e uma integral que pode ser estimada e tem limite igual à 0 quando se envia um número primo p para o infinito. Como essa prova é complexa e exige bem mais do que cálculo 1, fica apenas como informação extra.

Agora para o segundo questionamento, temos diversos exemplos que provam a importância de e para o cálculo. Primeiramente podemos mostrar as suas singularidades quanto à integrais e derivadas, tal que:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \tag{17}$$

$$\int e^x dx = (e^x) + k \tag{18}$$

O que representam duas relações curiosas da função exponencial de base e, visto que a derivada da função é ela mesma e a integral indefinida desta também é a menos de uma constante. Graficamente temos que a integral definida da função $f(x) = e^x$ nos extremos de integração $]-\infty, a]$ a área abaixo do gráfico irá corresponder à e^a, pois:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{a} (e^x)dx &= e^x \Big|_{-\infty}^{a} \\ &= e^a - \underbrace{\frac{1}{\infty}}_{\to 0} \\ &= e^a\end{aligned}$$

Além disso, quando dizemos que vale (17), temos que a equação da reta tangente calculada no ponto $(a, f(a))$ é dada por:

$$\begin{aligned}g(x) - f(a) &= f'(a)(x-a) \\ g(x) &= e^x(x-a) + f(a)\end{aligned}$$

Portanto temos o seguinte caso em que e aparece como muitos resultados:

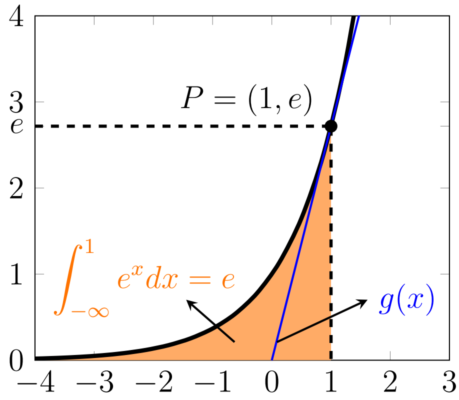

Figura 4: *Em preto, temos a função $f(x) = e^x$, em vermelho a área compreendida no intervalo $]-\infty, 1]$ tal que a área é igual à e e em azul a reta tangente ao gráfico no ponto $x = 1$ cuja equação é dada por $g(x) = e \cdot x$, em que e é a derivada de $f(x)$ calculada no ponto $x = 1$.*

Um outro caso que envolve e é um limite fundamental que é usado pra provar a derivada de e^x tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \tag{19}$$

Mais uma integral essencial para o cálculo é

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + k \tag{20}$$

onde $\ln(x)$ é, como vimos no início dessa seção o logaritmo de x na base e e isso foi um grande resultado, visto que quando Pierre de Fermat encontrou que a área abaixo a uma função do tipo $\frac{1}{x^{\alpha}}$ encontrou que

$$\int_0^a \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \tag{21}$$

porém não encontrava solução quando $-\alpha = -1$.

O número de Euler, analogamente à π também é conveniente para ser moldado como séries infinitas que convergem ao número e, como em série de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (22)$$

Ou então, para $x = 1$:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (23)$$

O número de Euler também aparece constantemente na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, por exemplo, por uma equação diferencial linear de primeira ordem, tal que:

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot g(t) + f(t) \quad (24)$$

em que $f(x)$ e $g(x)$ são funções dadas, contínuas e definidas num mesmo intervalo I. Considerando alguns casos teremos que:

- Quando $f(t) = 0$ no intervalo I e $k \in \mathbb{R}$, a equação possui solução geral do tipo:

$$x = ke^{\int g(t)dt} \quad (25)$$

- Quando $f(t) \neq 0$, $g(t) \neq 0$ no intervalo I e $k \in \mathbb{R}$, a família de soluções para a eq. (24) é dada na forma:

$$\begin{aligned} x = ke^{\int g(t)dt} + & \quad (26) \\ + e^{\int g(t)dt} \int f(t)e^{-\int g(t)dt}dt & \end{aligned}$$

Esses últimos resultados são de grande importância, pois aparecem em contextos diversos principalmente em mecânica quântica[6] e outras áreas que utilizam o cálculo como linguagem.

Esses resultados mostram a importância desse número para o cálculo diferencial e integral e como ele ajudou no desenvolvimento deste com o passar do tempo.

Uma aproximação para o e é:

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ 662\ 497\ 757\ 247\ 093\ 699\ 959\ 574\ 966\ 967\ 627\ 724\ \ldots$$

[6] nesse contexto, não são EDO's de primeira ordem as que aparecem no geral, no entanto, EDO's de ordem superior também tem relação fundamental com o número de Euler.

3 Os números de Liouville

Por fim, temos agora os números de Liouville, estes que são peças curiosas da matemática. Joseph Liouville em 1844 publicou pela primeira vez o que viria a ser um número transcendente e definiu que para que um número obtenha essa característica, se as seguintes relações forem satisfeitas: *seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e algébrico de grau $n > 1$, então existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n},\ \forall\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Q},\ q > 1 \tag{27}$$

Esse resultado ficou conhecido como *Teorema de Liouville* que determinar se um número $\alpha \in \mathbb{R}$, mas $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
No seu artigo, Liouville publicou que: Seja $\xi \in \mathbb{R}$. ξ é denominado como um número de Liouville se existir uma sequência infinita de números racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geqslant 1}$, tal que $q_j > 1$ e

$$0 < \left|\xi - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} \tag{28}$$

Apesar de ser um resultado meio que jogado, ele significa que não existe um número ξ que satisfaça a qualquer equação polinomial de coeficientes inteiros, portanto, ξ não é algébrico, logo ξ é um número transcendente, dessa forma *todo número de Liouville é transcendente.*
Na história, o primeiro número de Liouville publicado já possuia uma relação com o cálculo, pois ele foi determinado a partir de uma série infinita tal que:

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0,110001000... \tag{29}$$

Esse número é curioso, visto que é composto apenas pelos números 0 e 1, e o algarismo 1 ocupa posições específicas que obedecem à ordem 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!, ... e $k \in \mathbb{N}$. Nota-se também que esse número é uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{10}$ e cujo resultado da soma é $\frac{10}{9}$.
Um fato curioso do conjunto dos números de Liouville ($\mathbb{L}$) é que qualquer número real pode ser escrito como a soma de dois números de Liouville. Isso é interessante uma vez que o conjunto $\mathbb{L}$ tem medida nula em R, ou seja, praticamente nenhum número real é de Liouville, portanto, podemos afirmar que esses números estão posicionados "estrategicamente"na reta real. Esse resultado foi demonstrado por Paul Erdös em 1962, no artigo *Representations of real numbers as sums and products os Liouville numbers.* Resumindo foi determinado que

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \exists\ \sigma, \tau \mid f(\sigma,\tau) = \alpha \tag{30}$$

em que $f(\sigma,\tau) = \sigma + \tau$. Esse resultado foi ampliado por Edward B. Burger tal que, sobre certas condições

$$\exists\ \sigma, \tau \mid \sigma^\tau = \alpha \tag{31}$$

resultado este que David Caveny, estabelecendo certas condições, mostrou que σ^τ pode também ser transcendente.

Uma relação que pode vir da definição (27) é que se um número real α é aproximável na ordem n por sucessões de racionais distintos $\frac{p_j}{q_j}$ pelo limite:

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{p_j}{q_j}\right) = \alpha \tag{32}$$

Números de Liouville não são bem aproximados por números reais, no entanto o caso contrário é possível, como visto acima. Um questionamento que vem a partir das observações acima é: o número π e o número e são números de Liouville? Ou então, todo número transcendente é de Liouville?
A resposta para ambas as perguntas é não, pois como $\mathbb{L}$ tem medida nula em $\mathbb{R}$ e a maioria dos números reais é transcendente, decorre imediatamente que nem todo número dito transcendente é de Liouville, tampouco os números e e π.

Conclusão

Fica claro que os números de Liouville não possuem uma aplicabilidade concreta, diferentemente dos números e e π. No entanto, o conceito de transcendência de um número, proposto por Liouville é de extrema importância para a matemática e, consequentemente, para o cálculo ou seja, os números de Liouville são mais frutos de criações do que números concretamente utilizados no dia a dia.
Os números de Liouville acabam por se tornarem um conceito que baseia toda a *teoria dos números transcendentes* e com isso se relaciona diretamente com o número de Euler e o π, estes que sim, possuem ampla aplicabilidade e não são apenas para fins de criação abstrata na matemática, mas sim para o uso "comum".
Dessa forma, podemos concluir como os números transcendentes são importantes para que o cálculo se desenvolva e novos resultados que os envolvam apareçam nas diversas áreas do conhecimento que o utilizam para modelar seus objetos de estudo.

Referências

[1] Uma abordagem sobre os números de Liouville. Evandro menezes de souza amarante, 2017.

[2] Jean Lelis Anna Carolina Lafetá, Elaine Silva. Teoria dos números transcendentes: do teorema de liouville à conjectura de schanuel, 2017.

[3] Renata Naoko Corrêa. Cálculo de π, 2016.

[4] Wagner Wilson Pereira de Carvalho. Números transcendentes. 2018.

[5] Elaine Cristine de Souza Silva. Alguns resultados relacionados a números de liouville. 2015.

[6] Ramon Formiga Figueira. O número de euler, 2017.

[7] H. Guidorizzi. *Um curso de cálculo*, volume 1. GEN, 6° edition.

[8] Hermes Antônio Pedroso Juliana Conceição Precioso. História do número e: Gênese e aplicações, 2013.