

**INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**Fernando Sermuksnis Fiordiluglio**

**COMO PITÁGORAS FEZ O PRIMEIRO EXPERIMENTO  
ISOLADO QUE REUNIU MATEMÁTICA E MÚSICA E OS  
PROBLEMAS DA ESCALA PITAGÓRICA**

São Paulo

2020

FERNANDO SERMUKSNIS FIORDILUGLIO

**COMO PITÁGORAS FEZ O PRIMEIRO EXPERIMENTO ISOLADO  
QUE REUNIU MATEMÁTICA E MÚSICA E OS PROBLEMAS DA  
ESCALA PITAGÓRICA**

Trabalho desenvolvido para obtenção  
de aprovação na disciplina de Cálculo  
I ministrada pelo Prof. Dr. Oscar Joao  
Abdounur.

São Paulo

2020

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>4</b>
<b>2 DESENVOLVIMENTO .....</b>	<b>5</b>
2.1 Pitágoras .....	5
2.2 Escola Pitagórica .....	5
2.3 A lenda da “oficina de ferreiros” .....	5
2.4 O Monocórdio .....	6
2.5 Construção da Escala Musical Pitagórica .....	6
2.6 Problemas na Escala Musical Pitagórica .....	7
2.7 Temperamento Igual .....	8
2.8 O enfraquecimento do Pitagorismo e a relação dos números Irracionais com o Cálculo ...	9
<b>3 CONCLUSÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>11</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Pitágoras foi um importante pensador conhecido atual e popularmente por sua grande contribuição para a geometria: "em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". Além disso, desenvolveu trabalhos na área da Filosofia, Matemática, Música, Moral, Geografia e Medicina.

No cenário musical, Pitágoras foi o primeiro a determinar relações entre matemática e música, sendo que essas relações serão discorridas neste trabalho. Na época, as consonâncias perfeitas (que já eram bem fundamentadas na cultura musical grega), as quartas, as quintas e as oitavas notas musicais foram essenciais para estabelecer o início da sua percepção sobre essas relações. Ainda que os instrumentos da época fossem muito rudimentares e pudessem dificultar a alternância entre tons, esses instrumentos - que não eram polifônicos - atendiam bem a escala pitagórica.

Desse modo, à medida que a música começou a se tornar polifônica, explorando as últimas consequências entre os tons e inserindo vários instrumentos, não era mais possível ter uma escala pura só com números inteiros. Em outras palavras, era necessário abdicar da pureza da escala pitagórica a favor da simetria. Essa mudança implicou num problema matemático que perdurou anos, em que os ciclos de quintas não coincidiam com os ciclos de oitavas, impossibilitando a equivalência entre as notas. Gerou-se, então o que foi conhecido como “coma pitagórica” ou incomensurabilidade.

Assim, foram tomados esforços para elucidar a questão: como resolver a leve desafinação que acontecia entre os ciclos? Para respondê-la, tomou-se necessário “temperar” a escala musical, dividindo a oitava em doze intervalos iguais, ou seja, encontrar o semitom que gerava a escala simétrica.

Portanto, o enfraquecimento do Pitagorismo mediante a abordagem geométrica induziu à concepção dos números contínuos. Ademais, a aritmetização de razões, a identidade do número com a reta (que é o nascimento da geometria), a álgebra desenvolvido naquela época intuíram a construção do número Real e corroboraram um dos fundamentos do Cálculo.

## **2 DESENVOLVIMENTO**

### **2.1 Pitágoras**

Pitágoras viveu aproximadamente no século VI a.C., foi filósofo e matemático grego nascido na ilha de Samos. Seus pais eram comerciantes de alta classe e investiam muito em sua educação. Então, logo cedo Pitágoras foi estudar com um dos maiores sábios de sua época, Tales, que ficava em Mileto. Lá, adquiriu bastante conhecimento dos povos regionais que conhecia em suas viagens. Depois, quando se mudou para a Babilônia, passou a entender como a ciência se desenvolvia naquela região.

### **2.2 Escola Pitagórica**

A Escola Pitagórica, que levava o nome do seu fundador, tinha como missão: “defender que todas as coisas são números e o princípio fundamental de tudo é a estrutura numérica”.

Como uma espécie de irmandade religiosa dedicada à Matemática, Religião e Filosofia, os discípulos, majoritariamente aristocratas, estavam interessados no estudo da Aritmética (Teoria dos Números), da Geometria, da Astronomia e da Música. Esse era o conjunto de matérias da escola, posteriormente chamado de quadrivium. Embora fossem racionais e matemáticos, os pitagóricos também tinham doutrinas baseadas em concepções místicas, como o “Tetraktys”, que era a concepção do “triângulo perfeito” formado por números inteiros (1, 2, 3 e 4).

### **2.3 A lenda da “oficina de ferreiros”**

Há uma lenda atribuída a Pitágoras que explica como iniciou-se a curiosidade desse matemático a respeito de diferenças entre os sons. Ela foi relatada por uma construção histórica feita nos textos de Guido d’Arezzo - que viveu entre 992 – 1050 - e publicada no seu influente tratado de música “Micrologus”. De acordo com o que foi contado, Pitágoras ouvia sons de martelos emanados de uma oficina de ferreiros. Por isso, o que lhe passava em mente era que alguns sons pareciam agráveis ao ouvido e outros pareciam ruidosos. Então, Pitágoras passou a questionar qual seria a relação existente entre aqueles sons, já que alguns pareciam consonantes e outros, dissonantes. Contando com a ajuda de seu discípulo, Filolau, o filósofo

começou a analisar a relação entre o peso, o tamanho dos instrumentos e os sons produzidos por eles. Seus estudos foram utilizados com um instrumento que denominado “metalofone” e permitiram a descoberta da razão “1 para 2” entre os pesos dos martelos e os sons produzidos.

## **2.4 O Monocórdio**

Pitágoras construiu um instrumento que era formado por uma caixa acústica, contando com dois cavaletes fixados em suas extremidades e uma corda ao meio. Com isso, iniciou a investigação sobre a relação entre o comprimento de uma corda e o tom musical produzido por ela. Para isso, buscou razões de números inteiros que produzissem determinados intervalos sonoros e notou que havia alguma relação matemática entre as notas da escala musical e os comprimentos de uma corda vibrante.

Então, o estudioso compreendeu algumas relações: pressionando a corda do instrumento em um ponto a  $\frac{3}{4}$  do comprimento total da corda e tocando-a, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira; a  $\frac{2}{3}$  ouvia-se uma quinta acima do tom emitido pela corda inteira; a  $\frac{1}{2}$ , obtinha-se uma oitava acima do som original.

Assim sendo, o monocórdio de Pitágoras foi considerado o primeiro experimento científico isolado da história, justamente por se isolar de possíveis fenômenos e concentrar-se nos estudos do instrumento dentro de um ambiente.

## **2.5 Construção da Escala Musical Pitagórica**

Com base nas observações empíricas utilizando o monocórdio, Pitágoras começou a construir uma relação matemática entre as consonâncias dos tons e os intervalos musicais. Para a construção de sua escala, utilizou apenas os números racionais 1, 2, 3 e 4, além de estabelecer um princípio em que toda nota seria equivalente a outra quando a divisão da corda formasse sua metade (razão de 1:2).

Para definir a unidade de construção, era necessário encontrar algum semitom que fosse a nota de diferença, ou seja, não poderia ser uma oitava. Então, o matemático definiu que seria uma quinta justa ( $\frac{2}{3}$  do tamanho da corda), estabelecendo o chamado ciclo das quintas.

Quanto ao limite, determinou-se que a margem correspondente à construção da escala musical seria a metade e um inteiro da corda.

Já as consonâncias eram expressas sempre por frações de quintas ( $2/3$  da corda). Fazendo com que as frações e os sons consonantes entrassem em harmonia, enquanto qualquer outro intervalo que fosse escolhido poderia gerar um som dissonante, ruidoso.

Com esses princípios, Pitágoras construiu uma escala em que a Matemática regia a Música.

## 2.6 Problemas na Escala Musical Pitagórica

Com o decorrer dos estudos, foram notados alguns obstáculos durante a abordagem pitagórica: um ciclo de quintas não coincide com um ciclo de oitavas. Ao se criar escalas espera-se que se chegue numa nota de equivalência. Seguindo o princípio de quintas justas, não é possível chegar num ciclo de oitavas.

Considerando que as “analogias” (termo vindo do grego) dos tons, referem-se ao fato de as notas serem proporcionais e não iguais, uma nota pode ser “como” a outra. Nesse sentido, observou-se que a equivalência da oitava era percebida como uma nota parecida, mas não era a mesma nota.

Então, por que ajustar ciclos de quintas e oitavas? Esses ciclos eram mais ou menos consonantes, então, tentar ajustar um ciclo no outro não parecia ser impossível, mas gerou a incomensurabilidade que pode ser verificada matematicamente da seguinte forma:

Existem  $m, n$  naturais, diferentes de zero, tal que:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m = 2^n \quad ? \quad 3^m = 2^n + m \quad ?$$

A frequência da quinta é  $3/2$ . Então se multiplicarmos “ $m$ ” vezes, espera-se que se chegue numa oitava porque a frequência é o dobro. Matematicamente nenhuma potência de 3 é igual a uma potência de 2.

Além disso, é possível encontrar a maior proximidade possível entre os ciclos de quintas e oitavas na escala pitagórica:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,746 \text{ e } 2^7 = 128 \text{ A razão entre}$$

$$129,746 : 128 \cong 1,013 \text{ (coma pitagórica)}$$

Essa razão é uma leve diferença na escala, à grosso modo, é uma “sujeira”. Já em termos musicais, isso comprometia a construção das escalas e das composições, a transposição musical e a própria lógica de construção de um instrumento musical.

A coma pitagórica, assim como essa razão ficou denominada, possui, em algum momento, um ou mais intervalos que soam diferentes dos demais. Uma característica comum é que a sucessão de 12 quintas forma uma oitava e nunca se encontra com a fundamental, fazendo com que as notas dispostas num desenho representativo circular formem uma espiral. Essa espiral se desenvolve infinitamente de dentro para fora. Como dois semitons não compunham um tom, isso impedia os instrumentos de trocar alternativamente entre os tons, gerando diferença.

Assim, à medida que a música começou se tornar polifônica, explorando as últimas consequências, não era mais possível ter uma escala pura só com números inteiros, ou seja, fez-se necessário abdicar da pureza a favor da simetria.

Considerando a simetria, a “coma pitagórica”, ao invés de ter onze quintas limpas e uma imunda, foi dividida ao longo de doze quintas. Um batimento com uma diferença bem pequena, praticamente imperceptível ao ouvido, ganhou então a possibilidade de tocar polifonicamente. O preço matemático para isso é não trabalhar mais com números inteiros, recorrendo-se aos números irracionais. No contexto musical pitagórico, é inconcebível aceitar essa nova ideia e iniciou-se uma crise na música relacionada a qual sistematização deveria ser utilizada.

## 2.7 Temperamento Igual

Considerando a dificuldade de ajustar os ciclos de quintas e oitavas, fez-se necessário estabelecer um novo fundamento matemático. Stevin, físico e matemático belga, foi o primeiro a tentar resolver o problema abdicando dos números racionais e utilizando os números irracionais.

Assim, deu-se o pontapé inicial para o desenvolvimento do temperamento – que consistia em dividir a oitava em 12 intervalos iguais – e surgiu a dúvida: qual o semitom que gerava essa escala temperada (aquilo que a escala pitagórica não conseguia fazer)?

Utilizando os números irracionais, a distância entre as notas é constante. Então, é possível a transposição de tons e os instrumentos se tornam mais versáteis.

Semitom

$$f^{12} = 2$$

Quinta Justa

$$f = 2^{\frac{7}{12}} \cong 1,4983$$



$$f = 2^{\left(\frac{1}{12}\right)} \cong 1,059463$$

Semitom Pitagórico

Quinta Pitagórica

$$f = \frac{256}{243} = 1,05349794$$

$$f1 = \frac{3}{2} \cdot f0 = 1,5 \cdot f0$$

O  $f$  é uma frequência, que elevada a “12 potência”, gera a oitava. Com números racionais, não é possível. Tirando a raiz 12 de 2, encontra-se 1,059463, obtendo-se notas e intervalos iguais. O semitom pitagórico tinha uma leve diferença, que o ouvido não tem uma grande percepção, mas tinha uma enorme importância para a música quando ocorria a transposição de tons.

## 2.8 O enfraquecimento do Pitagorismo e a relação dos números Irracionais com o Cálculo

No século XVI, criou-se a necessidade de dividir a oitava em 12 partes iguais, ou seja, estabelecer uma nota igual entre a Do e a Ré, isto é, dividir o tom em duas partes iguais. No entanto, os músicos da época não queriam construir essa relação porque não era algo “pitagórico”. Era algo geométrico e geometria não era permitida na música.

Vicenzo Galilei, outro importante estudioso, também abordou o tema de forma não numérica, dizendo que essa abordagem poderia depender de fatores outros como o comprimento da corda, a espessura, a tensão ou uma abordagem sonora. Ademais, a concordância de intervalo depende da coincidência do período de vibração, começando a ideia de frequência.

Logo, o enfraquecimento do Pitagorismo com a introdução dos números irracionais, na revolução científica, é um dos responsáveis pela introdução do pensar (identidade do número com a reta), além de esse problema musical ter uma contribuição para a construção do número Real no fundamento do Cálculo. Essas relações se tornaram aritméticas, durante a música, fortalecendo os números contínuos. Além disso, o som passa a ser tratado como fenômeno acústico e representado como onda. A ideia da diferença do som entre as ondas é o que fortaleceu a base para o estudo musical.

## 3 CONCLUSÃO

Por conta da dificuldade de transposição musical, do misticismo dos pitagóricos e das limitações dos instrumentos rudimentares dos tempos antigos, fez-se necessário rever a

construção da escala musical. Com a música passando de aritmética para geométrica, criaram-se modelos de sistematização do temperamento musical. Esse fator permitiu a polifonia. Então, instrumentos diversos poderiam tocar juntos transpondo o tom. Tanto que J.S Bach, músico e compositor, criou inúmeros concertos explorando ao máximo o temperamento igual.

Nesse contexto, o experimento do monocórdio contribuiu para a construção do conceito de fração, que ganhou um novo visual como um modelo musical. Os conceitos utilizados por Pitágoras para realizar esse experimento cooperaram com o aprendizado de conceitos matemáticos, como frações e proporções.

Além disso, a necessidade de se trabalhar com número irracionais para concluir o modelo de sistematização do temperamento musical, intuiu a ideia de números contínuos e fortaleceu bastante o início do fundamento do Cálculo com a construção do número Real.

Quanto à abdicação da “pureza” pitagórica, em favor da simetria e da equivalência entre as notas, o temperamento igual foi difundido séculos depois, sendo ainda muito utilizando atualmente.

Em suma, o desenvolvimento de conceitos matemáticos no meio musical foi um fator capaz de alavancar o aprimoramento do conhecimento científico.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FRAZÃO, Dilva. **Pitágoras**: matemático grego. Matemático grego. 2019. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/pitagoras/>. Acesso em: 01 jul. 2020.

SANTOS, Wigvan Junior Pereira dos. **Escola pitagórica**. 2020. Disponível em: <https://alunosonline.uol.com.br/filosofia/escola-pitagorica.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

GOMES, Carla Regina. **PITAGORAS DE SAMOS: DE MÍSTICO A PRECURSOR DA TEORIA DOS NUMEROS**. In: BIENAL DA SBM, 2010, João Pessoa. Trabalho [...]. João Pessoa: Ufpb - Universidade Federal da Paraíba, 2020. p. 1-4. Disponível em: [http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias/CarlaReginaGomes/trabalho\\_final](http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias/CarlaReginaGomes/trabalho_final). Acesso em: 29 jun. 2020.

RODRIGUES, José Francisco. **A Matemática e a Música**. Revista Colóquio/Ciências, n. 23, 1999, p. 17-32. Disponível em: [https://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus\\_99.pdf](https://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf). Acesso em: 01 jul. 2020.