

Ulisses Roberto de Sousa, 11811666

Oscar João Abdounur

Cálculo Diferencial e Integral I

15 de Julho de 2020

Matemática dos Árabes

Após a queda do conhecimento grego e a queima da biblioteca de alexandria no século *VIII*, o ocidente passa pelo o que é conhecido como idade das trevas. Isto pois pouco conhecimento é desenvolvido na europa durante essa época até meados do século *XIV*, onde temos o início do período chamado renascimento. Porém é nesta época que o conhecimento árabe prosperará iniciando-se por volta do século *VIII*, vemos que muito do conhecimento desenvolvido provém dos estudiosos árabes, em uma era conhecida como a idade de ouro Islâmica.

CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Veremos uma breve perspectiva do contexto histórico para melhor compreensão do assuntos tratados a seguir. Por volta do século *VIII* o império romano estava em declínio devida suas várias guerras e uma força muçulmana cada vez mais forte. No ano de 642 o império muçulmano comandado pelo general Amir Ibne Alas em nome do califa Omar Ibne Alcatabe invadiu o Egito, onde estava localizada a biblioteca de Alexandria possivelmente o maior centro de conhecimento do mundo. Entre os historiadores ainda não há uma definição sobre o que aconteceu com a biblioteca da Alexandria, porém a versão mais aceita aponta que a biblioteca foi queimada a mando do califa Omar. Notoriamente a queima da biblioteca marca uma perda gigantesca do conhecimento humano, porém é o “primeiro contato” dos árabes com o conhecimento grego, que posteriormente irá render grandes frutos.

Por volta de 786 sob domínio do califa Harun al-Rashid e a mando do mesmo, começa o encorajamento de tradução dos textos gregos que se mantiveram após a queima de Alexandria, dentre as primeiras traduções está o texto “Os Elementos” de Euclides, e vários outros. Com o califa seguinte al-Ma'mun filho de al-Rashid, o aprendizado se torna mais forte, al-Ma'mun funda a Casa da Sabedoria em Bagdá, aumentando o incentivo em novas traduções e o começo das pesquisas árabe. Com a Casa do Saber os intelectuais árabes deixam de ser apenas tradutor do conhecimento de diversas culturas, como gregas e indianas, e passam a produzir seu próprio conhecimento.

Dentre as traduções feitas pelos árabes cabe ressaltar algumas obras, como Os Elementos, A Ótica, dentre outras de Euclides, de Arquimedes temos a obra sobre Esfera e Cilindros, além da Medição do Círculo. Outros vários pensadores tiveram suas obras traduzidas para o árabe, tais como, Diofanto, Menelau, Ptolomeu, Apolônio, dentre outros. Vale enfatizar também que as obras foram traduzidas de forma não coordenada, ou seja, livros eram traduzidos conforme apresentados aos intelectuais da época, de forma aleatória, sem uma continuação de cada obra. Além de os tradutores da época serem matemáticos, astrônomos ou médicos, que usava essas traduções como material para suas pesquisas, porém não se tratava de estudiosos da língua, o que dificultava muito as traduções, a ponto de várias dessas serem traduzidas novamente.

Com os matemáticos árabes vemos avanços em diversas áreas, como no conceito de números primos e perfeitos, onde Thabit Ibn Qurra se destaca, também vemos um conhecimento de números irracionais e números negativos, apesar de todas as obras estar com os resultados ou as soluções das equações no domínio dos positivos. Com o matemático Abu Kamil nascido no século IX vemos somas de números irracionais, que em notação atual seria algo como:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}}$$

Na trigonometria vemos alguns nomes importantes, como Habash al-Hasib, Ibn Mu'adh al-Jayyani, Nasir al-Din al-Tusi, dentre outros. Eles introduzem novas funções como a secante e a cossecante. Algumas fórmulas trigonométricas também são desenvolvidas neste período como a relação diferentes funções seno do ângulo duplo, seno da soma, entre outras. Vemos avanços na trigonometria e geometria, principalmente após o tratado de al-Khwarizmi sobre a álgebra.

Os matemáticos árabes ficaram conhecidos pela preservação do conhecimento grego, pela álgebra e pelo sistema numérico indo-arábico. Contribuições importante para matemática, porém não foram apenas esses os avanços dos estudiosos árabes, avanços na trigonometria, astronomia, além de vários estudos inovadores e em áreas diversas da matemática. Em seguida veremos particularidades do desenvolvimento matemático árabe voltado ao cálculo, inclusive possivelmente o primeiro cálculo de uma integral.

AL-KHWARIZMI E A ÁLGEBRA

Com al-Khwarizmi os estudiosos árabes deram o primeiro passo rumo uma área totalmente nova da matemática, a álgebra. Desde então, vemos o começo de uma ruptura da matemática árabe com a matemática grega. É com o novo conceito de álgebra que temos o início do que pode ser chamado de pensamento abstrato, quando matemáticos não mais analisa problemas geométricos e passa a buscar soluções para problemas abstrato. Apesar de ainda não utilizar simbolismo nessas novas equações, vemos que com al-Khwarizmi a manipulação do que chamamos hoje de equações algébricas se inicia.

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi nascido por volta de 780, possivelmente onde hoje é o Iraque, na cidade de Bagdá, busca desenvolver um padrão para solucionar equações quadráticas e lineares. Vemos que equações cúbicas só serão objetos de estudos com os seus sucessores, onde irão buscar a redução do polinômio para se tornar uma equação já estudada por al-Khwarizmi. Nestes estudos vemos que al-Khwarizmi dividiu as equações em seis tipos, onde ele as considera como modelos padrão, por exemplo:

1. $x^2 = x$
2. $x^2 + 5x = 25$
3. $x^2 + 3 = 9$
4. $x + 7 = x^2$
5. $x = 10$
6. $x^2 = 9$

Nota-se que estas são expressões usadas atualmente e que na época em questão não se utilizava símbolos e as equações eram escrita literalmente, por exemplo, o segundo caso seria: “Quadrados e raízes iguais a unidades”, onde quadrados é o x^2 , raízes é o termo $5x$ e unidades neste caso seria 25, vemos que o uso das palavras mantinha a generalidade da equação. Vemos também que al-Khwarizmi não utilizava termos negativos, fazendo manipulação algébrica sempre que um termo negativo aparecesse.

Vemos que alguns conceitos utilizados por al-Khwarizmi nessa época foi de suma importância para o cálculo atualmente. A implantação de números indo-arábicos utilizado até hoje, inicia-se no trabalho dele de forma sistemática e passa a ser usado com frequência na matemática. A implementação de um método para resolução de equações, sem a necessidade de usar a resoluções geométricas, mostra o início de uma revolução na matemática.



Figura 1 - Acima: *Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi nascido em 790 e morreu em 850, escreveu o livro Hisab al-jabr w'al-muqabala (Restauração e Balanceamento) considerado o primeiro livro da álgebra.*

THABIT IBN QURRA E A INTEGRAL

Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani era um matemático, astrônomo, cujo o trabalho tem uma variedade imensa. Da teoria dos números, passando por geometria e cálculos de área, superfície e volumes, dentre outras. Nascido no ano de 836 em Harran, Mesopotâmia. Devido a localidade de seu nascimento no sudeste da atual Turquia, a língua usada era o siríaco, porém Thabit era de uma seita chamada Sabiana que tinha fortes ligações com o grego e vários de seus membros falavam grego, com a conquista dos sabianos pelo islã estes tornou-se falantes do árabe. Thabit então dominava as três línguas e isto é um importante fator para a vida dele.

Não há uma unanimidade entre os historiadores, porém o mais aceito é que Thabit era um cambista em sua cidade quando chamou a atenção dos irmãos Banu Musa, matemáticos contemporâneo de Thabit que trabalhava na Casa da Sabedoria. Inicialmente pela sua habilidade com os idiomas Thabit foi incumbido das traduções dos textos antigos da Grécia, além de receber treinamento em matemática e medicina. Isto fez com que Thabit tivesse capacidade para desenvolver diversas traduções e revisões das traduções anteriormente feita. Ele revisou uma terceira tradução do livro Elementos de Euclides feita por Hunayn ibn Ishaq, esta foi a única preservada no tempo, Thabit fez a tradução de três livros de Apolônio, dentre outros.

Os irmãos Jafar Muhammad ibn Musa ibn Shakir, Ahmad ibn Musa ibn Shakir e al-Hasan ibn Musa ibn Shakir, conhecidos como irmãos Banu Musa, são de suma importância para os matemáticos árabes daquela época, dentre vários trabalhos deles um trabalho em particular foi importante, intitulado A Medida de Figuras Simples e Esféricas. Este trabalho foi pioneiro neste domínio, dividido em três partes que analisa a medida do círculo, o volume da esfera e o último sobre a trisseção do ângulo. Neste trabalho vemos a influência do livro *XII* de Euclides, onde os irmãos usa a proposição deste livro para os seus cálculos. Vemos também uma explicação dos irmãos sobre a aproximação de π feita por Arquimedes, com isso os irmãos Banu Musa estendem este trabalho para calcular a circunferência do círculo, utilizando o método de exaustão já conhecido pelos gregos, eles mostram a área da superfície da esfera, que corresponde a $4\pi r^2$, além de determinar o volume da esfera sendo $\frac{4}{3}\pi r^3$. Vemos aqui grandes avanços neste domínio além de um princípio do cálculo de áreas, o que resultará no cálculo integral.

Com Thabit vemos um avanço significativo, ciente desse trabalho e com seu próprio trabalho de pesquisa, ele desenvolve um grande avanço em direção ao cálculo, ele desenvolve três tratados nessa área, o primeiro sobre a área do segmento de uma parábola, o segundo sobre o

volume de um parabolóide e terceiro sobre a seção e a área do cilindro. No primeiro dos tratados, Thabit prova 21 lemas, boa parte deles sobre aritmética, nestes lemas vemos que ele já dominava totalmente o conceito de limite superior, o que ele mostra quando faz o cálculo da área de uma segmento de uma parábola. Veremos a seguir o cálculo de Thabit dessa área que segundo Adolph–Andrei Pavlovich Yushkevich, matemático russo que viveu no século *XX* é exatamente a mesma definição de integral usada por Leibniz e Newton.

Vemos no livro “Os Diferentes Aspectos da Cultura Islâmica”, no capítulo 2.1 sobre Matemática árabe, escrito por Roshdi Rashed uma descrição do método onde o mesmo fala, uma parábola de segmento ABC , com diâmetro AD igual ao segmento BC vide Figura (1), vemos que para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos dividir em partes, $A, G_1, G_2, \dots, G_{n-1}, D$, do diâmetro AD tal que: A área BAC é o limite superior do polígono $BE_{n-1} \dots E_2 E_1 A F_1 F_2 \dots F_{n-1} C < \varepsilon$. Com o mesmo rigor Thabit prova que $2/3$ da área $BHMC$ é a área desse polígono. Usando a prova por absurdo ele mostra que a área dessa parábola não pode ser inferior nem superior a $2/3$ da área do paralelograma. Vemos mais uma vez o método atual de linguagem matemática sendo empregado aqui, porém como já mencionado não se usava simbolismo nesta época.

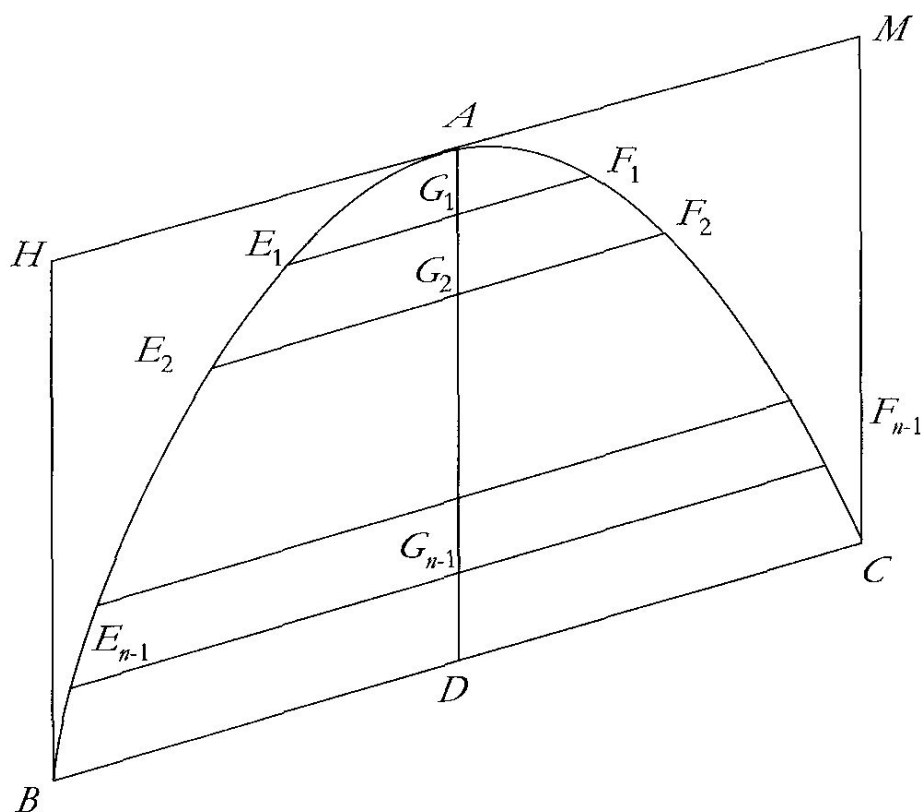


Figura 2 - Acima: representação do cálculo feito por Thabit, para área da parábola.

Vemos aqui a implementação do limite superior que com essa abordagem, pode ser visto a idéia fundamental do cálculo integral de Riemann. Onde em notação atual seria o equivalente a calcular

$$\int_0^q \sqrt{px} \, dx$$

onde p é um número inteiro, vemos que pela primeira vez um intervalo de integração foi subdividido em partes desiguais. Cabe ressaltar que segundo M.A. Youschkevitch foi com um procedimento análogo que no século *XVII* Pierre de Fermat desenvolveu a quadratura das curvas $y = x^{m/n}$, com $(m, n) \neq 1$. Thabit aplica o que posteriormente será chamado de cálculo de integral, para medir a área de uma parábola e apresenta a prova utilizando o cálculo de exaustão.

Estas são alguns dos vários exemplos do quanto a matemática muçulmana evoluiu no período de *VII* até meados do século *XIII*, onde vários nomes ficaram de fora, como o matemático e neto de Thabit Ibn Qurra, Ibrahim Ibn Sinân (909-946) fez diversos avanços nos trabalhos do seu avô além de trabalhos próprios como a medição da parábola, layout das seções cônicas dentre outros. Busquei demonstrar o cálculo praticado pelos principais intelectuais daquela época e neste recorte tentei expor um dos maiores avanços com relação ao integral (no caso de fato o cálculo de uma integral). Isso explica por que decidi aprofundar em um matemático em específico e não englobar as várias áreas da matemática aplicadas pelos árabes.

Por fim tenho duas observações para fazer, primeiro podemos ver através desses pequenos exemplos que os matemáticos árabes não estavam apenas preservando o conhecimento grego, como estava aprimorando este conhecimento de várias formas possíveis, cálculos de integral e derivadas já tinham sido aplicados por estes antes de Leibniz e Newton desenvolverem, cabe ressaltar que apesar de já ter este conhecimento os árabes ainda não via este cálculo como uma ferramenta para obter todo tipo de área, nem para ser aplicada em qualquer equação. Em segundo vemos que mesmo com tantos avanços muito do conhecimento árabe ficou perdido por muito tempo, o que explica a pouca influência dos árabes no cálculo e em outras áreas da matemática, porém isto não anula seu avanço. Com isto deixo uma pergunta com minha visão da resposta:

Como seria o cálculo atual caso todo o conhecimento árabe não fosse perdido?

Minha resposta é que seria semelhante ao atual, pois pelo pouco da minha pesquisa é perceptível que os árabes estavam buscando um rigor nos estudos e pesquisas, faltava apenas a idealização destes métodos como ferramentas para resoluções de problemas diversos o que possivelmente evoluiria a um padrão visto atual do cálculo.

Referências Bibliográficas

1. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_mathematics/
2. https://www.wikiwand.com/fr/Math%C3%A9matiques_arabes
3. Roshdi Rashed, Les Mathématiques infinitésimales du IXe au Xle siècle (London : Al-Furqân islamic heritage foundation), vol. I
4. <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/thabit-ibn-qurra-al-sabi-al-harrani>
5. Roshdi R. et al, The Different aspects of Islamic culture, v. 4: Science and technology in Islam; 2001
6. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/>
7. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banu_Musa/